ベッセル関数 (II) ーベッセル関数の級数表示ー

1.　第 1 種ベッセル関数

z 平面上で与えられたベッセルの微分方程式

$$\frac{d^2 f}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{df}{dz}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)f=0 \tag{1}$$

の級数による解を求める [1]。ここで $\nu\in\mathbb{C}$ は定数である（注 1）。$z=0$ のまわりの級数解を考える。$z=0$ は確定特異点であるので

$$f(z)=z^{\alpha}\sum_{m=0}^{\infty}a_m z^m=\sum_{m=0}^{\infty}a_m z^{m+\alpha} \tag{2}$$

と仮定して係数 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ $(a_0\neq 0)$ と指数 α を係数比較により求める（係数 a_m は α に依存しない定数)。もしそうして得られた級数が収束すれば、それは式 (1) の一つの解となっている。

$$f'(z)=\sum_{m=0}^{\infty}(m+\alpha)\,a_m z^{m+\alpha-1}$$
$$f''(z)=\sum_{m=0}^{\infty}(m+\alpha)\,(m+\alpha-1)\,a_m z^{m+\alpha-2}$$

を式 (1) へ代入すれば

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+\alpha)\,(m+\alpha-1)\,a_m z^{m+\alpha-2}+\sum_{m=0}^{\infty}(m+\alpha)\,a_m z^{m+\alpha-2}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)\sum_{m=0}^{\infty}a_m z^{m+\alpha}=0$$
$$\sum_{m=0}^{\infty}\left\{(m+\alpha)\,(m+\alpha-1)+(m+\alpha)-\nu^2\right\}a_m z^{m+\alpha-2}+\sum_{m=0}^{\infty}a_m z^{m+\alpha}=0$$
$$\sum_{m=0}^{\infty}\left\{(m+\alpha)^2-\nu^2\right\}a_m z^{m+\alpha-2}+\sum_{m=0}^{\infty}a_m z^{m+\alpha}=0$$

が得られる。この方程式が成り立つには z の各べき係数が 0 とならなくてはならない。

最低次の $z^{\alpha-2}$ の係数から

$$\left(\alpha^2-\nu^2\right)a_0=0$$

となり、$a_0\neq 0$ より指数決定式

$$\alpha^2-\nu^2=0 \tag{3}$$

が導かれる。これから $\alpha=\pm\nu$ となる。

$z^{\alpha-1}$ の係数からは

$$\left\{(1+\alpha)^2-\nu^2\right\}a_1=0$$

となる。$\alpha=\nu$ の場合

$$\left\{(1+\nu)^2-\nu^2\right\}a_1=0$$
$$(1+2\nu)\,a_1=0$$

となり、$\nu\neq -1/2$ に対して $a_1=0$ となる。一方、$\alpha=-\nu$ の場合は

$$\left\{(1-\nu)^2-\nu^2\right\}a_1=0$$
$$(1-2\nu)\,a_1=0$$

となり、$\nu \neq 1/2$ に対して $a_1 = 0$ となる。係数 a_1 は α に依存しないので $a_1 = 0$ と決まる。

また、一般のべき $z^{\alpha+m-2}$ の係数を 0 とおけば漸化式

$$\left\{(m+\alpha)^2 - \nu^2\right\} a_m + a_{m-2} = 0$$

が得られる。$a_1 = 0$ であるからこの漸化式から $a_3, a_5, \cdots$ はすべて 0 でなければならない。

いま指数決定式の根のうち $\alpha = \nu$ をとれば、この漸化式より

$$m\,(m+2\nu)\,a_m + a_{m-2} = 0$$

ここで、$m = 2m'\ (m' = 1, 2, \cdots)$ とおけば

$$\begin{aligned}
a_{2m'} &= -\frac{a_{2m'-2}}{2m'\,(2m'+2\nu)} \\
&= -\frac{a_{2(m'-1)}}{2^2 m'\,(m'+\nu)} \\
&= \frac{(-1)^2\,a_{2(m'-2)}}{2^4 m'\,(m'+\nu)\,(m'-1)\,(m'-1+\nu)} \\
&= \frac{(-1)^2\,a_{2(m'-2)}}{2^4 m'\,(m'-1)\,(m'+\nu)\,(m'-1+\nu)} \\
&\ \vdots \\
&= \frac{(-1)^{m'}\,a_0}{2^{2m'} m'\,(m'-1)\cdots 1\cdot(m'+\nu)\,(m'-1+\nu)\cdots(1+\nu)} \\
&= \frac{(-1)^{m'}\,a_0}{2^{2m'} m'!\,(m'+\nu)\,(m'+\nu-1)\cdots(\nu+1)}
\end{aligned}$$

となる。ここでガンマ関数の性質

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{4}$$

を用いれば

$$\begin{aligned}
\Gamma(m'+\nu+1) &= (m'+\nu)\Gamma(m'+\nu) \\
&= (m'+\nu)(m'+\nu-1)\Gamma(m'+\nu-1) \\
&\ \vdots \\
&= (m'+\nu)(m'+\nu-1)\ \cdots\ (\nu+1)\Gamma(\nu+1)
\end{aligned}$$

となるので

$$a_{2m'} = \frac{(-1)^{m'}\,\Gamma(\nu+1)}{2^{2m'} m'!\Gamma(m'+\nu+1)} a_0, \quad m' = 1, 2, \cdots$$

となる。したがって

$$a_0 = \frac{1}{2^{\mu}\Gamma(\nu+1)}$$

と選べば、一般項の係数は

$$a_{2m'} = \frac{(-1)^{m'}}{2^{2m'+\nu} m'!\Gamma(m'+\nu+1)}$$

で与えられることになり、求める級数は

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{m'=0}^{\infty} a_{2m'} z^{2m'+\nu} \\
&= \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m'}}{2^{2m'+\nu} m'!\Gamma(m'+\nu+1)} z^{2m'+\nu} \\
&= \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m'}}{m'!\Gamma(m'+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m'}
\end{aligned}$$

すなわち

$$f(z)=J_\nu(z)\equiv\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \tag{5}$$

となる。これは ν 次の**第 1 種ベッセル関数**と呼ばれている。

第 1 種ベッセル関数 (5) に現れる z のべき級数

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}J_\nu(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}=\sum_{m=0}^{\infty}c_m\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

を考えて、その級数の収束半径 r を係数比較から求めると

$$\begin{aligned}r&=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{c_m}{c_{m+1}}\right|\\&=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{(m+1)!\Gamma(m+\nu+2)}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\right|\\&=\lim_{m\to\infty}|m(m+\nu+1)|=\infty\end{aligned}$$

となる。したがって、この級数は z のすべての有限値に対して正則な関数である。

指数決定式のもう一つの解 $\alpha=-\nu$ に対する解は $J_\nu(z)$ で ν のかわりに $-\nu$ とおいたものに等しい。それを $J_{-\nu}(z)$ で表す。ν が整数でないとき $J_\nu(z)$ と $J_{-\nu}(z)$ は 1 次独立である。それは z の次数が $z^{\nu+2m}$ と $z^{-\nu+2m}$ で全く共通点がないことから分かる（ロンスキー行列式からも示すことができる）。したがって、これらは 2 階同次微分方程式であるベッセルの方程式の 2 つの基本解である。

ν が正整数 n に等しいときは、級数解 (5) で $\nu\to-n$ とすればガンマ関数の性質（$\Gamma(z)$ は z が 0 または負の整数で値が $+\infty$ か $-\infty$ のいずれかになる）より

$$\lim_{\nu\to-n}\frac{1}{\Gamma(m+\nu+1)}=0\quad m\le n-1$$

であるので

$$\begin{aligned}J_{-n}(z)=\lim_{\nu\to-n}J_\nu(z)&=\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m-n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}\\&=\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}\sum_{m=n}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m-n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}\end{aligned}$$

ここで、$k=m-n$ とおけば

$$\begin{aligned}J_{-n}(z)&=\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}}{(k+n)!\Gamma(k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2(k+n)}\\&=(-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+n)!k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\\&=(-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\\&=(-1)^nJ_n(x)\quad n:\text{整数}\end{aligned} \tag{6}$$

となり、$J_n(z)$ と $J_{-n}(z)$ とは 1 次従属となる。

ここで $J_\nu(z)$ と $J_{-\nu}(z)$ の関係を別の観点から確認するためにロンスキー行列式

$$\begin{aligned}W\left(J_\nu(z),\,J_{-\nu}(z)\right)&=\begin{vmatrix}J_\nu(z)&J_{-\nu}(z)\\J'_\nu(z)&J'_{-\nu}(z)\end{vmatrix}\\&=J_\nu(z)J'_{-\nu}(z)-J_{-\nu}(z)J'_\nu(z)\end{aligned} \tag{7}$$

を計算する。両辺を z で微分して

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dz}W\left(J_\nu(z),\, J_{-\nu}(z)\right) &= J'_\nu(z)J'_{-\nu}(z) + J_\nu(z)J''_{-\nu}(z) - J'_{-\nu}(z)J'_\nu(z) - J_{-\nu}(z)J''_\nu(z) \\
&= J_\nu(z)J''_{-\nu}(z) - J_{-\nu}(z)J''_\nu(z) \\
&= J_\nu(z)\left(-\frac{1}{z}J'_{-\nu}(z) - \left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)J_{-\nu}(z)\right) - J_{-\nu}(z)\left(-\frac{1}{z}J'_\nu(z) - \left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)J_\nu(z)\right) \\
&= -\frac{1}{z}\left(J_\nu(z)J'_{-\nu}(z) - J_{-\nu}(z)J'_\nu(z)\right) \\
&= -\frac{1}{z}W\left(J_\nu(z),\, J_{-\nu}(z)\right)
\end{aligned}
$$

となり、$W\left(J_\nu(z),\, J_{-\nu}(z)\right)$ についての 1 階微分方程式が得られるので、変数分離すれば

$$
\begin{aligned}
\frac{dW\left(J_\nu(z),\, J_{-\nu}(z)\right)}{W\left(J_\nu(z),\, J_{-\nu}(z)\right)} &= -\frac{dz}{z} \\
\ln\left(W\left(J_\nu(z),\, J_{-\nu}(z)\right)\right) &= -\ln z + C \\
W\left(J_\nu(z),\, J_{-\nu}(z)\right) &= \frac{C}{z} \quad C:\text{定数}
\end{aligned}
$$

となる。つまり $W\left(J_\nu(z),\, J_{-\nu}(z)\right)$ は $\dfrac{C}{z}$ の係数のみが残る。これより

$$
\begin{aligned}
J_\nu(z) &= \left(\frac{z}{2}\right)^\nu\left(\frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + O(z^2)\right) \\
J'_\nu(z) &= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-1}\left(\frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)} + O(z^2)\right) + \left(\frac{z}{2}\right)^\nu O(z) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\nu)} + O(z^2)\right)
\end{aligned}
$$

とすることでガンマ関数の相反公式

$$
\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z},\ z \neq 0,\, \pm1,\, \pm2,\, \cdots \tag{8}
$$

を用いれば

$$
\begin{aligned}
W\left(J_\nu(z),\, J_{-\nu}(z)\right) &= J_\nu(z)J'_{-\nu}(z) - J_{-\nu}(z)J'_\nu(z) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^{-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\frac{1}{\Gamma(-\nu)} - \frac{1}{\Gamma(-\nu+1)}\frac{1}{\Gamma(\nu)}\right) \\
&= \frac{1}{z}\left(\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\frac{1}{\Gamma(1-(\nu+1))} - \frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\frac{1}{\Gamma(\nu)}\right) \\
&= \frac{1}{z}\left(\frac{\sin\pi(\nu+1)}{\pi} - \frac{\sin\pi\nu}{\pi}\right) \\
&= -\frac{2\sin\pi\nu}{\pi z}
\end{aligned} \tag{9}
$$

となる。したがって、$\nu \notin \mathbb{Z}$ のときは $W\left(J_\nu(z),\, J_{-\nu}(z)\right) \neq 0$ となるので $J_\nu(z)$ と $J_{-\nu}(z)$ は、[2] の【命題 2】により 1 次独立である。一方、$\nu \in \mathbb{Z}$ のときは $W\left(J_\nu(z),\, J_{-\nu}(z)\right) = 0$ となるため [2] の【命題 1】により 1 次従属であることがわかる。

2. 第 2 種ベッセル関数

ベッセルの微分方程式の 2 つの独立な基本解はすでに求めた $J_\nu(z)$ と $J_{-\nu}(z)$ であって、これらを基本解としてとることができる。しかし、ν が整数 n に等しいとき、$J_\nu(z)$ と $J_{-\nu}(z)$ は互いに独立ではなくなるので、$J_n(z)$ のほかに、それとは独立な解を求めなければならない。その解を $Y_\nu(z)$ として、$J_\nu(z)$ と $J_{-\nu}(z)$ の線形結合として以下のように表す。

$$
Y_\nu(z) = C_1J_\nu(z) + C_2J_{-\nu}(z) \qquad C_1,\, C_2:\text{定数} \tag{10}
$$

$J_\nu(z)$ と $J_{-\nu}(z)$ は式 (1) を満たすため、$Y_\nu(z)$ も式 (1) を満たす。そこで、$W\left(J_\nu(z),\, J_{-\nu}(z)\right)$ と比較して $\sin\pi\nu$ を除去できるように $Y_\nu(z)$ を構成する（C_1, C_2 を定める）[3]。$J_\nu(z), J_{-\nu}(z)$ と $Y_\nu(z)$ のロンスキー行列式を求めると

$$
\begin{aligned}
W\left(J_\nu(z),\, Y_\nu(z)\right) &= J_\nu(z)Y'_\nu(z) - Y_\nu(z)J'_\nu(z) \\
&= J_\nu(z)\left(C_1J'_\nu(z) + C_2J'_{-\nu}(z)\right) - \left(C_1J_\nu(z) + C_2J_{-\nu}(z)\right)J'_\nu(z) \\
&= C_1\left(J_\nu(z)J'_\nu(z) - J_\nu(z)J'_\nu(z)\right) + C_2\left(J_\nu(z)J'_{-\nu}(z) - J_{-\nu}(z)J'_\nu(z)\right) \\
&= C_2\left(J_\nu(z)J'_{-\nu}(z) - J_{-\nu}(z)J'_\nu(z)\right) \\
&= C_2W\left(J_\nu(z),\, J_{-\nu}(z)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W\left(J_{-\nu}(z),\, Y_\nu(z)\right) &= J_{-\nu}(z)Y'_\nu(z) - Y_\nu(z)J'_{-\nu}(z) \\
&= J_{-\nu}(z)\left(C_1J'_\nu(z) + C_2J'_{-\nu}(z)\right) - \left(C_1J_\nu(z) + C_2J_{-\nu}(z)\right)J'_{-\nu}(z) \\
&= C_1\left(J_{-\nu}(z)J'_\nu(z) - J_\nu(z)J'_{-\nu}(z)\right) + C_2\left(J_{-\nu}(z)J'_{-\nu}(z) - J_{-\nu}(z)J'_{-\nu}(z)\right) \\
&= C_1\left(J_{-\nu}(z)J'_\nu(z) - J_\nu(z)J'_{-\nu}(z)\right) \\
&= -C_1W\left(J_\nu(z),\, J_{-\nu}(z)\right)
\end{aligned}
$$

となるため

$$
C_1 = -C_2 = \frac{1}{\sin\pi\nu}
$$

とすればロンスキー行列式から $\sin\pi\nu$ を除去できると考えられるが

$$
Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu}
$$

は $\nu\in\mathbb{Z}$ で $\sin\pi\nu$ が 0 となることから発散する。そのため $\nu\in\mathbb{Z}$ で極致をもつように C_1, C_2 を選ぶ必要がある。$Y_\nu(z)$ は $J_\nu(z)$ と線形独立な関数であるから

$$
W\left(J_\nu(z),\, Y_\nu(z)\right) = C_2W\left(J_\nu(z),\, J_{-\nu}(z)\right) = \frac{2}{\pi z} \;\Rightarrow\; C_2 = \frac{1}{\sin\pi\nu}
$$

のように選択してもよい。C_1 については $\nu\in\mathbb{Z}$ で極致を持つように定数 C'_1 を用いて

$$
W\left(J_{-\nu}(z),\, Y_\nu(z)\right) = -C_1W\left(J_\nu(z),\, J_{-\nu}(z)\right) \;\Rightarrow\; C_1 = \frac{C'_1}{\sin\pi\nu}
$$

と選択する。ここで、ロピタルの定理を適用することを考えれば

$$
Y_\nu(z) = \frac{C'_1J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu}
$$

の分子が $n\in\mathbb{Z}(n>0)$ として $\nu\to n$ で 0 となるように C'_1 を決めればいい。式 (6) を用いて

$$
\begin{aligned}
\lim_{\nu\to n}\left(C'_1J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)\right) &= C'_1J_n(z) - J_{-n}(z) \\
&= C'_1J_n(z) - (-1)^nJ_n(z) \\
&= \left(C'_1 - (-1)^n\right)J_n(z)
\end{aligned}
$$

となるため、$\nu\to n$ で $C'_1 = (-1)^n$ となる適当な定数は

$$
C'_1 = \cos\pi\nu
$$

である。以上より

$$
Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu} \tag{11}
$$

を得る。

この関数は明らかにベッセルの微分方程式の解である。ν が n に等しいとき、極限操作

$$
Y_n(z) = \lim_{\nu\to n}\frac{J_\nu(z)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu} \tag{12}
$$

によって $Y_n(z)$ 定義すれば、この $Y_n(z)$ は $J_n(z)$ とは独立で、またベッセルの微分方程式を満足する。したがって任意の ν に対して基本解として $J_\nu(z)$ と $Y_\nu(z)$ をとり、$\nu = n$ のときは $Y_n(z)$ は式 (12) を意味することとを約束する。こうして定義された $Y_\nu(z)$ は**第 2 種ベッセル関数**と呼ばれている。

この関数の級数による表現を定義式 (12) に従って求める。式 (12) で $\nu \to n$ とすれば分母・分子とも 0 となって不定形となるので、それぞれを ν について微分したのちに極限操作を行う（ロピタルの定理)。そうすると

$$\begin{aligned}
Y_n(z) &= \lim_{\nu\to n} \frac{J_\nu(z)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu} \\
&= \lim_{\nu\to n} \frac{1}{\pi\cos\pi\nu}\left(-\pi\sin\pi\nu J_\nu(z) + \cos\pi\nu\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(z) - \frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(z)\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{\pi}\left((-1)^n\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(z)\Big|_{\nu=n} - \frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(z)\Big|_{\nu=n}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(z)\Big|_{\nu=n} - (-1)^n\frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(z)\Big|_{\nu=n}\right)
\end{aligned} \tag{13}$$

となる。ここで、対数微分法により $y = a^{cx}$ の x による微分は、両辺の対数をとった $\ln y = cx\ln a$ を微分して

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = c\ln a \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = cy\ln a = ca^x\ln a \tag{14}$$

となることに注意すると、第 1 項は式 (5) を用いて

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(z) &= \frac{\partial}{\partial\nu}\left\{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}\right\} \\
&= \left(\frac{z}{2}\right)^\nu\ln\left(\frac{z}{2}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m} + \left(\frac{z}{2}\right)^\nu\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{\Gamma(m+\nu+1)}\right)\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}
\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \tag{15}$$

として定義されたディガンマ関数 $\psi(z)$ を用いれば

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{\Gamma(m+\nu+1)} &= -\frac{\frac{\partial}{\partial\nu}\Gamma(m+\nu+1)}{\Gamma(m+\nu+1)^2} \\
&= -\frac{\psi(m+\nu+1)}{\Gamma(m+\nu+1)}
\end{aligned}$$

と表されるので

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(z) &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\ln\left(\frac{z}{2}\right) - \psi(m+\nu+1)\right)\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu} \\
&= J_\nu(z)\ln\left(\frac{z}{2}\right) - \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\frac{\psi(m+\nu+1)}{\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu}
\end{aligned}$$

となり、

$$\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(z)\Bigg|_{\nu=n} = J_n(z)\ln\left(\frac{z}{2}\right) - \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\frac{\psi(m+n+1)}{\Gamma(m+n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n} \tag{16}$$

と表すことができる。

次に式 (13) の第 2 項を求めるために $J_{-\nu}(z)$ を

$$J_{-\nu}(z) = \sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m-\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m-\nu} + \sum_{m=n}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m-\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m-\nu}$$

のように分ける。ここで $\nu < n$ である。第 2 項の ν についての微分は前と同じように行えるが、第 1 項をそのまま微分すれば不定形が得られる（$\mathit{\Gamma}(z)$ は z が 0 または負の整数で値が $+\infty$ か $-\infty$ のいずれかになるため)。そのことを避けるため、ガンマ関数の相反公式 (8) を用いて

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\mathit{\Gamma}(m-\nu+1)} &= \frac{1}{\mathit{\Gamma}(1-(\nu-m))} \\
&= \frac{\mathit{\Gamma}(\nu-m)\sin\pi(\nu-m)}{\pi}
\end{aligned}
$$

とすれば、$0 \le m < n$ であれば

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{\mathit{\Gamma}(m-\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m-\nu}\right)\Bigg|_{\nu=n} &= \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2m}\frac{\mathit{\Gamma}(\nu-m)\sin\pi(\nu-m)}{\pi}\right)\Bigg|_{\nu=n} \\
&= \frac{1}{\pi}\Bigg[-\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2m}\ln\left(\frac{z}{2}\right)\mathit{\Gamma}(\nu-m)\sin\pi(\nu-m) \\
&\quad +\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2m}\left(\frac{\partial\mathit{\Gamma}(\nu-m)}{\partial\nu}\sin\pi(\nu-m)+\pi\mathit{\Gamma}(\nu-m)\cos\pi(\nu-m)\right)\Bigg]_{\nu=n} \\
&= \frac{1}{\pi}\Bigg[\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2m}\Bigg\{-\ln\left(\frac{z}{2}\right)\mathit{\Gamma}(\nu-m)\sin\pi(\nu-m) \\
&\quad +\psi(\nu-m)\mathit{\Gamma}(\nu-m)\sin\pi(\nu-m)+\pi\mathit{\Gamma}(\nu-m)\cos\pi(\nu-m)\Bigg\}\Bigg]_{\nu=n} \\
&= \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m}\mathit{\Gamma}(n-m)\cos\pi(n-m) \\
&= (-1)^{n-m}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m}\mathit{\Gamma}(n-m)
\end{aligned}
$$

となる。この等式を用いると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(z)\Big|_{\nu=n} &= \sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-1)^m(-1)^{n-m}\mathit{\Gamma}(n-m)}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m} \\
&\quad -J_{-n}(z)\ln\left(\frac{z}{2}\right)-\sum_{m=n}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\frac{\psi(m-n+1)}{\mathit{\Gamma}(m-n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m} \\
&= \sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-1)^n\mathit{\Gamma}(n-m)}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m} \\
&\quad -J_{-n}(z)\ln\left(\frac{z}{2}\right)+\sum_{m=n}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\frac{\psi(m-n+1)}{\mathit{\Gamma}(m-n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m}
\end{aligned}
$$

第 2 項の総和記号で $m = n + k$ とおけば

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(z)\Big|_{\nu=n} &= \sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-1)^n\mathit{\Gamma}(n-m)}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m} \\
&\quad -J_{-n}(z)\ln\left(\frac{z}{2}\right)-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}}{(k+n)!}\frac{\psi(k+1)}{\mathit{\Gamma}(k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k} \\
&= \sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-1)^n\mathit{\Gamma}(n-m)}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m} \\
&\quad -J_{-n}(z)\ln\left(\frac{z}{2}\right)+(-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\psi(k+1)}{\mathit{\Gamma}(k+n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k} \qquad (17)
\end{aligned}
$$

となる。式 (16)、(17) を式 (13) へ代入して

$$
\begin{aligned}
Y_n(z) &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial}{\partial \nu}J_\nu(z)\Big|_{\nu=n} - (-1)^n\frac{\partial}{\partial \nu}J_{-\nu}(z)\Big|_{\nu=n}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(J_n(z)\ln\left(\frac{z}{2}\right) - \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\frac{\psi(m+n+1)}{\Gamma(m+n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n}\right) \\
&\quad -\frac{(-1)^n}{\pi}\left(\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-1)^n\Gamma(n-m)}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m}\right. \\
&\qquad\qquad \left. -J_{-n}(z)\ln\left(\frac{z}{2}\right) + (-1)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\frac{\psi(m+1)}{\Gamma(m+n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(J_n(z) + (-1)^n J_{-n}(z)\right)\ln\left(\frac{z}{2}\right) - \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\Gamma(n-m)}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m} \\
&\quad -\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\frac{\psi(m+n+1)+\psi(m+1)}{\Gamma(m+n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n} \\
&= \frac{2}{\pi}J_n(z)\ln\left(\frac{z}{2}\right) - \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n} \\
&\quad -\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\psi(m+n+1)+\psi(m+1)}{m!(m+n)!}(-1)^m\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n}
\end{aligned} \tag{18}
$$

という結果が求められる。これが第 2 種ベッセル関数 $Y_n(z)$ の級数表示である。これは**ノイマン（Neumann）関数**とも呼ばれる。

ここで、ディガンマ関数 $\psi(z)$ の級数表示は

$$
\begin{aligned}
\psi(z) &= \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+z} - \frac{1}{k}\right) \\
\gamma &= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0.577215664 : \text{オイラー定数}
\end{aligned}
$$

と与えられ（注）、$l \in \mathbb{Z}$ に対しては

$$
\begin{aligned}
\psi(l) &= -\gamma - \frac{1}{l} - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+l} - \frac{1}{k}\right) \\
&= -\gamma - \frac{1}{l} + \sum_{k=1}^{l}\frac{1}{k} \\
&= -\gamma + \sum_{k=1}^{l-1}\frac{1}{k}
\end{aligned}
$$

となることを用いると

$$
\psi(m+n+1) + \psi(m+1) = -2\gamma + \sum_{k=1}^{m+n}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}
$$

であるので、式 (18) は

$$\begin{aligned}
Y_n(z) = \frac{2}{\pi} J_n(z) \ln\left(\frac{z}{2}\right) &- \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n} \\
&+ \frac{2\gamma}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n} \\
&- \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n} \left(\sum_{k=1}^{m+n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}\right) \\
= \frac{2}{\pi} J_n(z) \left(\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma\right) &- \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n} \\
&- \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n} \left(\sum_{k=1}^{m+n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}\right) \qquad (19)
\end{aligned}$$

と表すこともできる。また、式 (13) において $n \to -n$ とすれば

$$\begin{aligned}
Y_{-n}(z) &= \lim_{\nu \to -n} \frac{J_\nu(z) \cos \pi\nu - J_{-\nu}(z)}{\sin \pi\nu} \\
&= \lim_{\nu \to -n} \frac{1}{\pi \cos \pi\nu} \left(-\pi \sin \pi\nu J_\nu(z) + \cos \pi\nu \frac{\partial}{\partial\nu} J_\nu(z) - \frac{\partial}{\partial\nu} J_{-\nu}(z)\right) \\
&= \frac{(-1)^{-n}}{\pi} \left((-1)^{-n} \frac{\partial}{\partial\nu} J_\nu(z)\Big|_{\nu=-n} - \frac{\partial}{\partial\nu} J_{-\nu}(z)\Big|_{\nu=-n}\right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial}{\partial\nu} J_\nu(z)\Big|_{\nu=-n} - (-1)^{-n} \frac{\partial}{\partial\nu} J_{-\nu}(z)\Big|_{\nu=-n}\right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\partial}{\partial\nu} J_{-\nu}(z)\Big|_{\nu=n} + (-1)^{-n} \frac{\partial}{\partial\nu} J_\nu(z)\Big|_{\nu=n}\right) \\
&= \frac{(-1)^{-n}}{\pi} \left(\frac{\partial}{\partial\nu} J_\nu(z)\Big|_{\nu=n} - (-1)^{-n} \frac{\partial}{\partial\nu} J_{-\nu}(z)\Big|_{\nu=n}\right) \\
&= (-1)^n Y_n(z) \qquad (20)
\end{aligned}$$

の関係が成立する（注 3）。ここで、5 行目で $\nu \to -\nu$ と書き換え、式 (13) を用いた。このことから第 1 種ベッセル関数の場合と同様に、$Y_n(z)$ と $Y_{-n}(z)$ は 1 次独立ではないことがわかる。

3.　まとめ

ベッセルの微分方程式

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{df}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) f = 0$$

の 1 次独立な 2 つの基本解は

$$\begin{aligned}
J_\nu(z) &= \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \mathit{\Gamma}(m+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \\
Y_\nu(z) &= \frac{J_\nu(z) \cos \pi\nu - J_{-\nu}(z)}{\sin \pi\nu}
\end{aligned}$$

で与えられ、一般解は

$$f(z) = C_1 J_\nu(z) + C_2 Y_\nu(z) \quad C_1, C_2 : \text{定数}$$

と表される。

$Y_\nu(z)$ は $\nu \in \mathbb{Z}$ の場合に対しては $n \in \mathbb{Z}$ で $\nu \to n$ の極限として

$$Y_n(z) = \lim_{\nu \to n} \frac{J_\nu(z) \cos \pi\nu - J_{-\nu}(z)}{\sin \pi\nu}$$

として定義され、$n \geq 0$ のとき

$$Y_n(z) = \frac{2}{\pi} J_n(z) \ln\left(\frac{z}{2}\right) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n}$$
$$- \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi(m+n+1)+\psi(m+1)}{m!(m+n)!} (-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n}$$

と級数表示できる。また、ディガンマ関数 $\psi(z)$ を級数表示すれば

$$Y_n(z) = \frac{2}{\pi} J_n(z) \left(\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma\right) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n}$$
$$- \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n} \left(\sum_{k=1}^{m+n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}\right)$$

と表される。

$\nu \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$ に対する第 1 種、第 2 種ベッセル関数のグラフを図 1 に示す。第 2 種ベッセル関数には $\ln z$ が含まれているので $Y_n(x)$ が実数であるためには $x > 0$ であり、$x \to +0$ に対して $Y_n(x) \to -\infty$ となる。

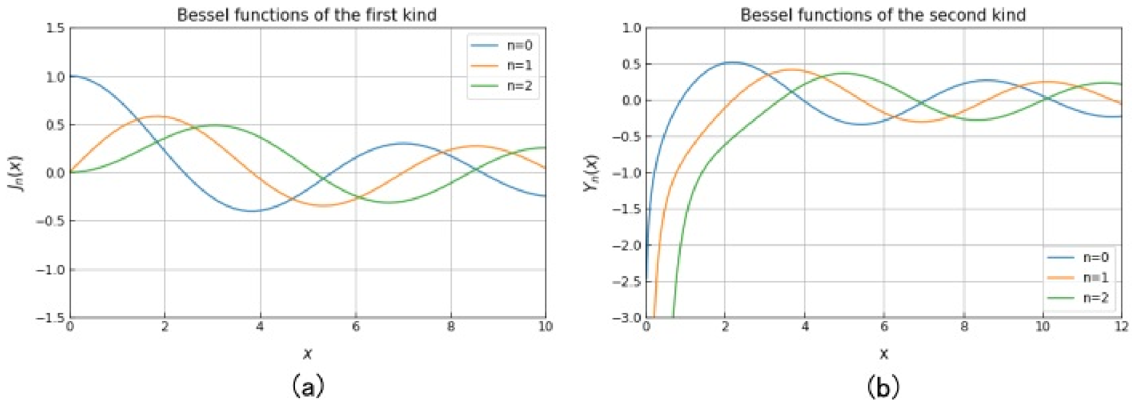

図 1　(a) 第 1 種ベッセル関数 $J_n(x)$、(b) 第 2 種ベッセル関数 $Y_n(x)$

（注 1）$\nu \in \mathbb{C}$ について

ベッセルの微分方程式 (1) における定数 ν が複素数となるよう応用例はほとんど見られない。しかしながら、ベッセル関数の複素積分表示を考える場合は、$J_\nu(z)$ を ν の正則関数として考え、ν を複素数として扱うことになるので $\nu \in \mathbb{C}$ と ν を複素数まで拡張している。

（注 2）ディガンマ関数 $\psi(z)$ の級数表示

ディガンマ関数 $\psi(z)$ の級数表示は、ガンマ関数を無限乗積で表したワイアストラース（Weierstrass）の公式

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-z/m} \tag{21}$$

から求めることができる。式 (21) より

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} e^{-\gamma z} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right)^{-1} e^{z/m}$$

となるので、両辺の対数をとれば

$$\ln \Gamma(z) = -\ln z - \gamma z - \sum_{m=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{z}{m}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z}{m}$$

この両辺を z で微分すれば

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(z)}\frac{d\Gamma(z)}{dz} &= -\frac{1}{z} - \gamma - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{m}}{1+\frac{z}{m}} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m} \\ &= -\frac{1}{z} - \gamma - \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m+z} - \frac{1}{m}\right)\end{aligned}$$

すなわち

$$\psi(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}\frac{d\Gamma(z)}{dz} = -\gamma - \frac{1}{z} - \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m+z} - \frac{1}{m}\right)$$

を得る。

（注 3）$Y_{-n}(z) = (-1)^n Y_n(z)$ の積分表示からの導出

式 (20) の関係を第 1 種ベッセル関数 $J_\nu(z)$ に対するシュレーフリの積分表示 [4]

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(\nu\theta - z\sin\theta\right)d\theta - \frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int_0^\infty e^{-\nu t - z\sinh t}dt, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2} \tag{22}$$

を用いて示す。式 (11)

$$\pi Y_\nu(z) = \pi\cot\pi\nu J_\nu(z) - \frac{\pi}{\sin\pi\nu}J_{-\nu}(z)$$

へ式 (22) を代入して

$$\begin{aligned}\pi Y_\nu(z) = \cot\pi\nu\int_0^\pi \cos\left(\nu\theta - z\sin\theta\right)d\theta - \frac{1}{\sin\pi\nu}\int_0^\pi \cos\left(\nu\theta + z\sin\theta\right)d\theta \\ - \cos\pi\nu\int_0^\infty e^{-\nu t - z\sinh t}d - \int_0^\infty e^{\nu t - z\sinh t}dt\end{aligned} \tag{23}$$

ここで、式 (23) の右辺第 2 項で $\theta \to \pi - \theta$ を置きかえれば

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos\left(\nu\theta + z\sin\theta\right)d\theta &= \int_\pi^0 \cos\left(\nu(\pi-\theta) + z\sin(\pi-\theta)\right)(-d\theta) \\ &= \int_0^\pi \cos\left(\nu\pi - \nu\theta + z\sin\theta\right)d\theta \\ &= \int_0^\pi \cos\left(\nu\pi - (\nu\theta - z\sin\theta)\right)d\theta \\ &= \cos\nu\pi\int_0^\pi \cos\left(\nu\theta - z\sin\theta\right)d\theta + \sin\nu\pi\int_0^\pi \sin\left(\nu\theta - z\sin\theta\right)d\theta\end{aligned}$$

となるので

$$\pi Y_\nu(z) = \int_0^\pi \sin\left(\nu\theta - z\sin\theta\right)d\theta - \int_0^\infty \left(e^{\nu t} + e^{-\nu t}\cos\pi\nu\right)e^{-z\sinh t}dt$$

すなわち

$$Y_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\left(\nu\theta - z\sin\theta\right)d\theta - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(e^{\nu t} + e^{-\nu t}\cos\pi\nu\right)e^{-z\sinh t}dt \tag{24}$$

となり、第 2 種ベッセル関数 $Y_\nu(z)$ に対するシュレーフリの積分表示が得られる。

$\nu = n$ に対しては

$$\begin{aligned}Y_n(z) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\left(n\theta - z\sin\theta\right)d\theta - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(e^{nt} + e^{-nt}\cos\pi n\right)e^{-z\sinh t}dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\left(n\theta - z\sin\theta\right)d\theta - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(e^{nt} + (-1)^n e^{-nt}\right)e^{-z\sinh t}dt\end{aligned} \tag{25}$$

となる。$\nu = -n$ に対しては

$$\begin{aligned}
Y_{-n}(z) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\left(-n\theta - z\sin\theta\right) d\theta - \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(e^{-nt} + (-1)^{-n}e^{nt}\right)e^{-z\sinh t}dt \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\left(n\theta + z\sin\theta\right) d\theta - \frac{(-1)^{-n}}{\pi}\int_0^{\infty}\left(e^{nt} + (-1)^{-n}e^{-nt}\right)e^{-z\sinh t}dt
\end{aligned} \tag{26}$$

ここで、式 (26) 右辺第 1 項で $\theta \to \pi - \theta$ とすれば

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sin\left(n\theta + z\sin\theta\right) d\theta &= \int_{\pi}^{0} \sin\left(n(\pi-\theta) + z\sin(\pi-\theta)\right)(-d\theta) \\
&= \int_0^{\pi} \sin\left(n\pi - n\theta + z\sin\theta\right) d\theta \\
&= \cos(n\pi)\int_0^{\pi} \sin\left(-n\theta + z\sin\theta\right) d\theta \\
&= -(-1)^n\int_0^{\pi} \sin\left(n\theta - z\sin\theta\right) d\theta
\end{aligned}$$

となるので、式 (26) へ代入して、式 (25) を用いれば

$$\begin{aligned}
Y_{-n}(z) &= \frac{(-1)^n}{\pi}\left[\int_0^{\pi} \sin\left(n\theta - z\sin\theta\right) d\theta - \int_0^{\infty}\left(e^{nt} + (-1)^{-n}e^{-nt}\right)e^{-z\sinh t}dt\right] \\
&= (-1)^n Y_n(z)
\end{aligned}$$

を得る。

参考文献

1) 薮下信 『特殊関数とその応用』 p.19 森北出版株式会社 (1991/04/05)

2) 『n 階線形常微分方程式の独立解』
https://ieyasu03.web.fc2.com/PhysicsMath/32-ODE.htmll

3)『【数学 PDF】ベッセル関数』
https://168iroha.net/blog/topic/?id=202002251149&sorting=post_date

4) G. N. Watson 『A TREATISE OF THE THEORY of BESSEL FUNCTIONS』
p.176-178 Merchant Books 2008