放物線座標と楕円座標

1.　放物線座標

円筒座標 (ρ, φ, z) から放物座標 (ξ, η, φ) への変換は、公式

$$z = \frac{1}{2}(\xi - \eta) \tag{1}$$
$$\rho = \sqrt{\xi\eta} \tag{2}$$

でおこなわれる（図 1(a)）。座標 ξ と η は

$$0 \leq \xi, \eta < \infty \tag{3}$$

の値をとる。

$\eta = \text{const}$ の面は、式 (2) より $\xi = \dfrac{\rho^2}{\eta}$ を式 (1) へ代入して

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho^2}{\eta} - \eta\right) \tag{4}$$

となり、z と ρ の関係は放物線で表わされ、式 (4) は z 軸を対称軸とする下に凸の回転放物面となる（図 1(b)）。同様に、$\xi = \text{const}$ の面は、$\eta = \dfrac{\rho^2}{\xi}$ であるので

$$z = \frac{1}{2}\left(\xi - \frac{\rho^2}{\xi}\right) \tag{5}$$

となり、上に凸の回転放物面を与える。これらの放物線の焦点は z 軸上の $z = 0$ である。

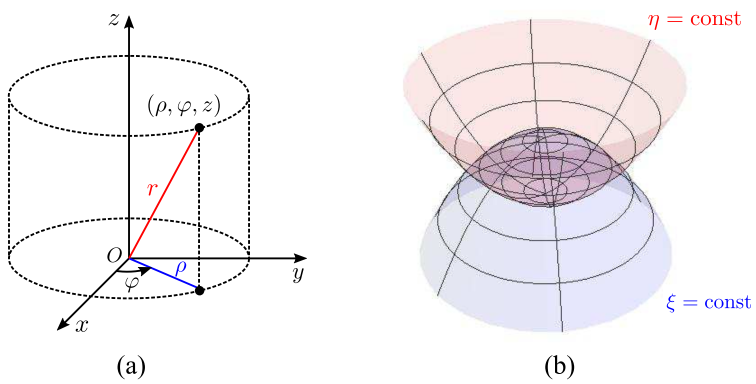

図 1　(a) 円筒座標、(b) 回転放物面

$\xi = \text{const}$ と $\eta = \text{const}$ の曲面からなる $\varphi = \text{const}$ の断面は、図 2 に示すように放物線座標となっている。また、これらの曲線はたがいに直交していることが以下のようにわかる。

交点での曲線の傾きを求めると、$\xi = \text{const}$ に対しては

$$\frac{dz_\xi}{d\rho} = -\frac{\rho}{\xi}$$

$\eta = \text{const}$ に対しては

$$\frac{dz_\eta}{d\rho} = \frac{\rho}{\eta}$$

したがって、傾きの積が

$$\frac{dz_\xi}{d\rho} \cdot \frac{dz_\eta}{d\rho} = -\frac{\rho}{\xi\eta} = -1$$

となることから直交していることが確かめられる。

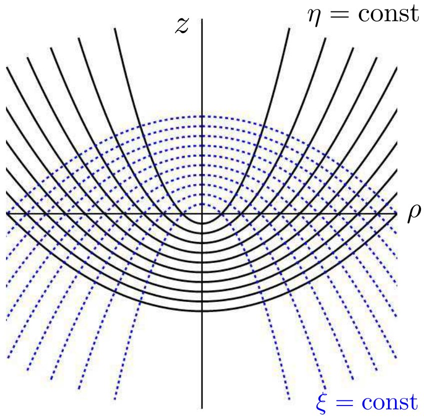

図 2　放物線座標

式 (1) および (2) の関係は、半径（図 1(a)）

$$r = \sqrt{z^2 + \rho^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(\xi - \eta)^2 + \xi\eta} = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \tag{6}$$

を導入して他の形に書くことができる。式 (1) および (6) より

$$\xi = r + z, \quad \eta = r - z \tag{7}$$

となる。

2.　楕円座標系

円筒座標 (ρ, φ, z) から楕円座標 (ξ, η, φ) への変換は、公式

$$z = \sigma\xi\eta \tag{8}$$
$$\rho = \sigma\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \tag{9}$$

でおこなわれる。ここで定数 σ は変換のパラメーターである。座標 ξ と η は

$$1 < \xi < \infty, \quad -1 < \eta < +1 \tag{10}$$

の値をとる。

$\xi = \mathrm{const}$ の面は、$\eta = \dfrac{z}{\sigma\xi}$ であるので

$$\rho^2 = \sigma^2(\xi^2 - 1)\left(1 - \frac{z^2}{\sigma^2\xi^2}\right)$$

すなわち

$$\frac{z^2}{(\sigma\xi)^2} + \frac{\rho^2}{\left(\sigma\sqrt{\xi^2 - 1}\right)^2} = 1 \tag{11}$$

となる。$\sigma\xi > \sigma\sqrt{\xi^2 - 1}$ であるので、式 (11) は z 軸を長半径とする回転楕円面（z 軸を対称軸とする）である（図 3(b)）。この楕円面の焦点は、z 軸上の点 $z = \pm\sigma$ である。同様に、$\eta = \mathrm{const}$ の面は、$\xi = \dfrac{z}{\sigma\eta}$ であるので

$$\rho^2 = \sigma^2\left(\frac{z^2}{\sigma^2\eta^2} - 1\right)(1 - \eta^2)$$

すなわち

$$\frac{z^2}{(\sigma\eta)^2} - \frac{\rho^2}{\left(\sigma\sqrt{1 - \eta^2}\right)^2} = 1 \tag{12}$$

となり、z 軸を対称軸とする回転双曲線面（図 3(b)）となる。この双曲線面の焦点も同じく、z 軸上の点 $z=\pm\sigma$ である。

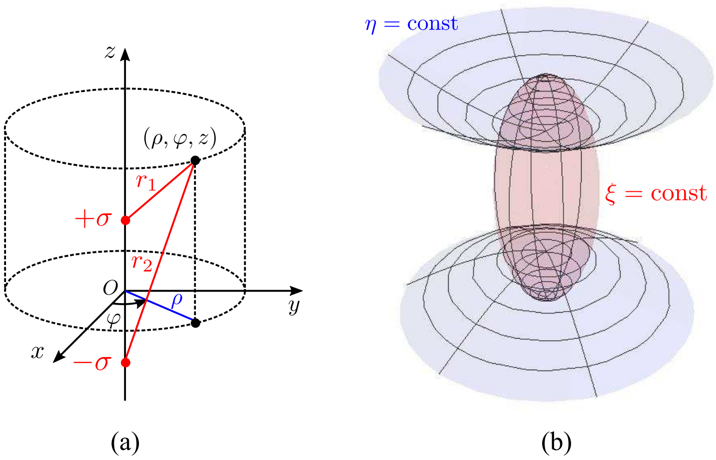

図 3　(a) 円筒座標、(b) 回転楕円面と回転双曲線面

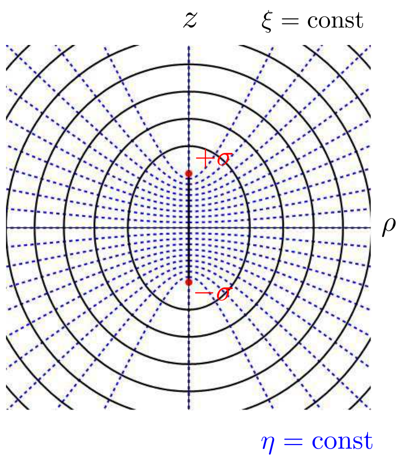

図 4　楕円座標

$\xi=\mathrm{const}$ と $\eta=\mathrm{const}$ の曲面からなる $\varphi=\mathrm{const}$ の断面は、図 4 に示すように楕円座標となっている。また、これらの曲線はたがいに直交していることが以下のようにわかる。交点での曲線の傾きを求めると、$\xi=\mathrm{const}$ に対しては

$$\frac{2z}{(\sigma\xi)^2}\frac{dz_\xi}{d\rho}+\frac{2\rho}{\left(\sigma\sqrt{\xi^2-1}\right)^2}=0$$

より

$$\frac{dz_\xi}{d\rho}=-\frac{(\sigma\xi)^2}{\left(\sigma\sqrt{\xi^2-1}\right)^2}\frac{\rho}{z}$$

$\eta=\mathrm{const}$ に対しては

$$\frac{2z}{(\sigma\eta)^2}\frac{dz_\eta}{d\rho}-\frac{2\rho}{\left(\sigma\sqrt{1-\eta^2}\right)^2}=0$$

より

$$\frac{dz_\eta}{d\rho}=\frac{(\sigma\eta)^2}{\left(\sigma\sqrt{1-\eta^2}\right)^2}\frac{\rho}{z}$$

したがって、傾きの積は

$$\frac{dz_\xi}{d\rho}\cdot\frac{dz_\eta}{d\rho}=-\frac{\xi^2\eta^2}{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\frac{\rho^2}{z^2}=-1$$

となり、直交していることが確かめられる。

座標の値 $z=\sigma,\ z=-\sigma$ の z 軸上の 2 点 $A_1,\ A_2$ までの距離

$$r_1=\sqrt{(z-\sigma)^2+\rho^2},\quad r_2=\sqrt{(z+\sigma)^2+\rho^2} \tag{13}$$

を導入すると（図 3(a)）、幾何学的にずっと見やすい関係が得られる。

式 (8) および (9) を式 (13) へ代入して

$$\begin{aligned} r_1&=\sigma\sqrt{(\xi\eta-1)^2+(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\\ &=\sigma\sqrt{\xi^2\eta^2-2\xi\eta+1+\xi^2-\xi^2\eta^2-1+\eta^2}\\ &=\sigma\sqrt{(\xi-\eta)^2}\end{aligned}$$

ここで式 (10) より、$\xi>\eta$ であるので

$$r_1=\sigma(\xi-\eta) \tag{14}$$

となる。同様に

$$\begin{aligned} r_2&=\sigma\sqrt{(\xi\eta+1)^2+(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\\ &=\sigma\sqrt{\xi^2\eta^2+2\xi\eta+1+\xi^2-\xi^2\eta^2-1+\eta^2}\\ &=\sigma(\xi+\eta)\end{aligned} \tag{15}$$

となる。これらより

$$\xi=\frac{\sigma}{2}(r_1+r_2),\quad \eta=\frac{\sigma}{2}(r_2-r_1) \tag{16}$$

となる。

（注）　焦点について

放物線、楕円、双曲線の焦点についてまとめておく。

1.　放物線　：　定直線からの距離と、定点からの距離が等しいような点の軌跡

定直線（準線）からの距離と、定点（焦点）からの距離が等しいような点の軌跡 C を考える。焦点を $F(0,\ f)$、準線を $y=a$（ただし、$f>a$ とする）とし、軌跡 C 上の点を $P(x,\ y)$ とする。図 5(a) に示すように、点 P から準線におろした垂線の足を点 H とすれば、軌跡 C 上の点に対しては

$$|PF|=|PH|$$

が成り立つ。したがって

$$\sqrt{x^2+(f-y)^2}=|y-a|$$

両辺 2 乗して整理すれば

$$\begin{aligned} x^2+(f-y)^2&=(y-a)^2\\ x^2+f^2-2fy+y^2&=y^2-2ay+a^2\\ -2(f-a)y&=-x^2-\left(f^2-a^2\right)\\ y&=\frac{x^2}{2(f-a)}+\frac{f+a}{2}\end{aligned} \tag{17}$$

となり、軌跡 C は放物線を描くことがわかる。

式 (17) と式 (4)

$$z=\frac{1}{2}\left(\frac{\rho^2}{\eta}-\eta\right)$$

を比較すれば

$$f - a = \eta, \quad f + a = -\eta$$

であることから

$$f = 0, \quad a = -\eta$$

となる。このことから式 (4) の放物線はの焦点は (0, 0)、準線は $y = -\eta$ であることがわかる。

同様に、式 (17) と式 (5)

$$z = \frac{1}{2}\left(\xi - \frac{\rho^2}{\xi}\right)$$

を比較すれば

$$f - a = -\xi, \quad f + a = \xi$$

であることから

$$f = 0, \quad a = \xi$$

となる。このことから式 (5) の放物線の焦点は (0, 0)、準線は $y = \xi$ であることがわかる。

2. 楕円 ： 2 定点からの距離の和が一定となる点の軌跡

2 定点（焦点）からの距離の和が一定とような点の軌跡 C を考える。2 定点 F, F' を x 軸上にとり、FF' の中点を座標原点とすれば、2 定点の位置は $F\,(f,\,0)\,,\,F'\,(-f,\,0)$ と表わされる（図 5(b)）。軌跡 C 上の点を $P\,(x,\,y)$ とすれば

$$|PF| = \sqrt{(x-f)^2 + y^2}, \quad |PF'| = \sqrt{(x+f)^2 + y^2} \tag{18}$$

となり、軌跡 C 上の点に対しては

$$|PF| + |PF'| = \mathrm{const} = 2a \quad (a > f) \tag{19}$$

が成り立つ。ここで $y = 0$ となる点 P を考えれば、$a > f$ となることがわかる。

式 (18) を式 (19) へ代入して

$$\sqrt{(x-f)^2 + y^2} + \sqrt{(x+f)^2 + y^2} = 2a$$

上式の左辺第 2 項を右辺に移し、両辺を 2 乗すれば

$$\begin{gathered}(x-f)^2 + y^2 = (x+f)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+f)^2 + y^2} + 4a^2 \\ -fx = fx + 2a^2 - 2a\sqrt{(x+f)^2 + y^2}\end{gathered}$$

より

$$a\sqrt{(x+f)^2 + y^2} = fx + a^2$$

さらに両辺を 2 乗して整理すると

$$\begin{gathered}a^2\left((x+f)^2 + y^2\right) = \left(fx + a^2\right)^2 \\ a^2\left(x^2 + 2fx + f^2 + y^2\right) = f^2x^2 + 2a^2fx + a^4 \\ a^2x^2 + a^2\left(f^2 + y^2\right) = f^2x^2 + a^4 \\ \left(a^2 - f^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - f^2\right) \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - f^2} = 1\end{gathered} \tag{20}$$

となり、軌跡 C は楕円を描くことがわかる。

式 (20) と式 (11)

$$\frac{z^2}{(\sigma\xi)^2} + \frac{\rho^2}{\left(\sigma\sqrt{\xi^2 - 1}\right)^2} = 1$$

を比較すれば

$$a = \sigma\xi, \quad a^2 - f^2 = \sigma^2\left(\xi^2 - 1\right)$$

となるので

$$f^2 = (\sigma\xi)^2 - \sigma^2\left(\xi^2 - 1\right) = \sigma^2$$

より

$$f = \pm\sigma$$

となる。このことから式 (11) の楕円の焦点は z 軸上の $z = \pm\sigma$ にあり、その長半径が $\sigma\xi$ であることがわかる。

3.　双曲線　：　2 定点からの距離の差が一定となる点の軌跡

2 定点（焦点）からの距離の差が一定とような点の軌跡 C を考える。2 定点 F, F' を x 軸上にとり、FF' の中点を座標原点とすれば、2 定点の位置は $F\,(f, 0)\,, F'\,(-f, 0)$ と表わされる（図 5(c)）。軌跡 C 上の点を $P\,(x, y)$ とすれば

$$|PF| = \sqrt{(x-f)^2 + y^2}, \quad |PF'| = \sqrt{(x+f)^2 + y^2} \tag{21}$$

となり、軌跡 C 上の点に対しては

$$|PF'| - |PF| = \mathrm{const} = 2a \quad (a < f) \tag{22}$$

が成り立つ。ここで $y = 0$ となる点 P を考えれば、$a < f$ となることがわかる。

式 (21) を式 (22) へ代入して

$$\sqrt{(x+f)^2 + y^2} - \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = 2a$$

上式の左辺第 2 項を右辺に移し、両辺を 2 乗すれば

$$\begin{aligned}(x+f)^2 + y^2 &= (x-f)^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x-f)^2 + y^2} + 4a^2 \\ fx &= -fx + 2a^2 + 2a\sqrt{(x-f)^2 + y^2}\end{aligned}$$

より

$$a\sqrt{(x-f)^2 + y^2} = fx - a^2$$

さらに両辺を 2 乗して整理する

$$\begin{aligned}a^2\left((x-f)^2 + y^2\right) &= \left(fx - a^2\right)^2 \\ a^2\left(x^2 - 2fx + f^2 + y^2\right) &= f^2x^2 - 2a^2fx + a^4 \\ a^2x^2 + a^2\left(f^2 + y^2\right) &= f^2x^2 + a^4 \\ \left(a^2 - f^2\right)x^2 + a^2y^2 &= a^2\left(a^2 - f^2\right) \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - f^2} &= 1\end{aligned}$$

ここで $a < f$ であることに注意すれば

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{f^2 - a^2} = 1 \tag{23}$$

となり、軌跡 C は双曲線を描くことがわかる。

式 (23) と式 (12)

$$\frac{z^2}{(\sigma\eta)^2} - \frac{\rho^2}{\left(\sigma\sqrt{1-\eta^2}\right)^2} = 1$$

を比較すれば

$$a = \sigma\eta, \quad f^2 - a^2 = \sigma^2\left(1 - \eta^2\right)$$

となるので

$$f^2 = (\sigma\eta)^2 + \sigma^2\left(1 - \eta^2\right) = \sigma^2$$

より

$$f = \pm\sigma$$

となる。このことから式 (12) の双曲線の焦点も z 軸上の $z = \pm\sigma$ にあることがわかる。

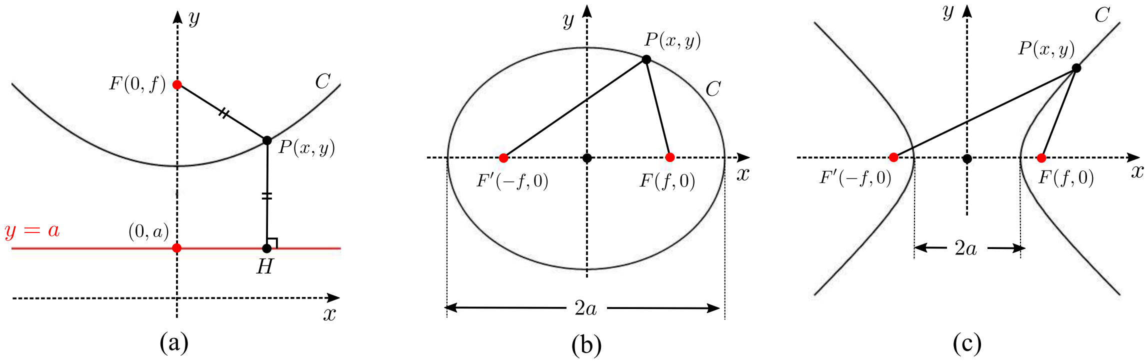

図 5　(a) 放物線、(b) 楕円、(c) 双曲線