第 2 可算公理

位相空間において、たかだか可算の基底が存在することを以下のように定義する。[1]

【定義 1】（第 2 可算公理）

位相空間 $(S,\,\mathfrak{O})$ において、たがだか可算の基底 $\mathfrak{B}$、すなわち

$$\mathrm{card}\,\mathfrak{B} \leq \aleph_0$$

であるような $\mathfrak{O}$ の基底 $\mathfrak{B}$ が存在するとき、$(S,\,\mathfrak{O})$ は**第 2 可算公理**を満足するという。

以下では、n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ における基底について考える。$\mathbb{R}^n$ における開集合系 $\mathfrak{O}\,(\mathbb{R}^n)$ は、[2] の【定理 2】、すなわち、[3] の【定義 1】を満たすことから $\mathbb{R}^n$ における位相となる。よって、$(\mathbb{R}^n,\,\mathfrak{O})$ は位相空間である。このとき、基底に関して以下が成り立つ。

【命題 1】

(i) $\mathbb{R}^n$ の開球体全体の集合は、$\mathbb{R}^n$ の 1 つの基底である。

(ii) $\mathbb{R}^n$ の開区間全体の集合は、$\mathbb{R}^n$ の 1 つの基底である。

【証明】

(i) ： [4] の【定理 2】のより、$\mathbb{R}^n$ における開集合 O は開球体

$$B\,(x\,;\,\epsilon) \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ \epsilon > 0) \tag{1}$$

の和集合として

$$O = \bigcup_{x \in O} B\,(x\,;\,\epsilon)$$

と表される。このとき、$B\,(x\,;\,\epsilon)$ 全体の集合を $\mathfrak{B}$ とすれば、[5] の【定義 2】（または、[4] の【定理 2’】）により、$\mathfrak{B}$ は $\mathbb{R}^n$ の 1 つの基底となる。

(ii) ：$\mathbb{R}^n$ の開区間

$$(a_1,\,b_1) \times \cdots \times (a_n,\,b_n) \quad (a_i,\,b_i \in \mathbb{R}^n,\ i = 1,\,\cdots,\,n)$$

の全体をとって、それを $\mathfrak{B}_1$ とすれば [6] の【問題 5】により、$\mathfrak{B}_1$ もまた $\mathbb{R}^n$ の 1 つの基底となる。■

【命題 1】の基底 $\mathfrak{B},\,\mathfrak{B}_1$ の“縮小”に関して以下が成り立つ。

【命題 2】

(i) $\mathbb{R}^n$ の有理点（すべての座標が有理数であるような点）を中心とする有理数半径の開球体

$$B\,(x\,;\,r) \quad (x \in \mathbb{Q}^n,\ r \in \mathbb{Q},\ r > 0)$$

全体の集合は、$\mathbb{R}^n$ の 1 つの基底である。

(ii) $\mathbb{R}^n$ における、端点がすべて有理数であるような開区間

$$(p_1,\,q_1) \times \cdots \times (p_n,\,q_n) \quad (p_i,\,q_i \in \mathbb{Q},\ i = 1,\,\cdots,\,n)$$

全体の集合は、$\mathbb{R}^n$ の 1 つの基底である。

【証明】

(i) ： O を $\mathbb{R}^n$ の開集合、x を O の任意の点とすれば、O は開集合であるので [2] の【定義 2】により

$$B\left(x\,;\,\epsilon\right) \subset O \tag{2}$$

となるような開球体 $B\left(x\,;\,\epsilon\right)$ が存在する。また、【命題 1】により開球体は $\mathbb{R}^n$ における 1 つの基底であるので、それを $\mathfrak{B}$ とすれば

$$B\left(x\,;\,\epsilon\right) \in \mathfrak{B}$$

となる。

このとき

$$B\left(x\,;\,\frac{\epsilon}{2}\right) \subset B\left(x\,;\,\epsilon\right)$$

となる開球体 $B\left(x\,;\,\epsilon/2\right)$ の中に有理点 x_0 をとることができる。また、有理距離 r を

$$d\left(x,\,x_0\right) < r < \frac{\epsilon}{2} \tag{3}$$

であるように選ぶことができる。これにより、有理数点 x_0 を中心とする有理数半径 r の開球体

$$B\left(x_0\,;\,r\right) \in \mathfrak{B}' \quad \left(x_0 \in \mathbb{Q}^n,\ r \in \mathbb{Q},\ r > 0\right) \tag{4}$$

を考えることができる。ここで、式 (4) の開球体全体の集合を $\mathfrak{B}'$ とした。このとき、$\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{O}\left(\mathbb{R}^n\right)$ である。

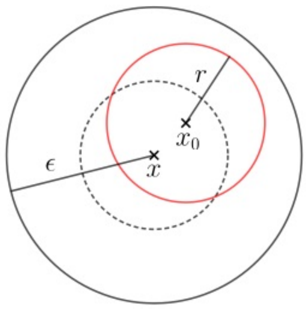

図 1　有理数点 x_0 を中心とする有理数半径 r の開球体 $B\left(x_0\,;\,r\right)$

次に、

$$y \in B\left(x_0\,;\,r\right)$$

とすれば

$$d\left(y,\,x_0\right) < r \tag{5}$$

となる。よって、式 (3)、(5) および三角不等式（ [7] の式 (6) ）により

$$\begin{aligned} d\left(y,\,x\right) &\le d\left(y,\,x_0\right) + d\left(x_0,\,x\right) \\ &< r + r \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

すなわち

$$y \in B\left(x\,;\,\epsilon\right)$$

となる。よって

$$y \in B\left(x_0\,;\,r\right) \ \Rightarrow\ y \in B\left(x\,;\,\epsilon\right)$$

より

$$B\left(x_0\,;\,r\right)\subset B\left(x\,;\,\epsilon\right) \tag{6}$$

となる。

　また、式 (3) の条件より $d\left(x,\,x_0\right)<r$ であるので

$$x\in B\left(x_0\,;\,r\right) \tag{7}$$

となる。

　したがって、式 (2)、(4)、(6)、(7) より

$$x\in B\left(x_0\,;\,r\right)\subset O,\quad B\left(x_0\,;\,r\right)\in\mathfrak{B}' \tag{8}$$

となる。式 (8) は、$\mathfrak{B}'\subset\mathfrak{O}\left(\mathbb{R}^n\right)$ のとき、任意の $O\in\mathfrak{O}\left(\mathbb{R}^n\right)$ および任意の $x\in O$ に対して

$$x\in B\left(x_0\,;\,r\right),\quad B\left(x_0\,;\,r\right)\subset O$$

となるような $B\left(x_0\,;\,r\right)\in\mathfrak{B}'$ が存在することを示しているので、[5] の【定理 1】により $\mathfrak{B}'$ は $\mathfrak{O}\left(\mathbb{R}^n\right)$、すなわち $\mathbb{R}^n$ の基底である。

(ii) ： $x=\left(x_1,\,\cdots,\,x_n\right)$ を $\mathbb{R}^n$ の点とし、ϵ を正の実数とするとき、[6] の【問題 5】により

$$\left(x_1-\frac{\epsilon}{\sqrt{n}},\,x_1+\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}\right)\times\cdots\times\left(x_n-\frac{\epsilon}{\sqrt{n}},\,x_n+\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}\right)\subset B\left(x\,;\,\epsilon\right) \tag{9}$$

が成り立つ。このとき

$$x_i-\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}<p_i<x_i<q_i<x_i+\frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \tag{10}$$

となるような有理数 $p_i,\,q_i$ をとることができるので、端点がすべて有理数であるような開区間

$$\left(p_1,\,q_1\right)\times\cdots\times\left(p_n,\,q_n\right)\in\mathfrak{B}'\quad\left(p_i,\,q_i\in\mathbb{Q},\,i=1,\,\cdots,\,n\right) \tag{11}$$

を考えることができる。ここで、式 (11) の開区間全体の集合を $\mathfrak{B}'$ とした。このとき

$$y=\left(y_1,\,\cdots,\,y_n\right)\in\left(p_1,\,q_1\right)\times\cdots\times\left(p_n,\,q_n\right) \tag{12}$$

とすれば

$$x_i-\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}<p_i<y_i<q_i<x_i+\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$$

より

$$y\in\left(x_1-\frac{\epsilon}{\sqrt{n}},\,x_1+\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}\right)\times\cdots\times\left(x_n-\frac{\epsilon}{\sqrt{n}},\,x_n+\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}\right) \tag{13}$$

となる。したがって、式 (9)、(12)、(13) より

$$\left(p_1,\,q_1\right)\times\cdots\times\left(p_n,\,q_n\right)\subset\left(x_1-\frac{\epsilon}{\sqrt{n}},\,x_1+\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}\right)\times\cdots\times\left(x_n-\frac{\epsilon}{\sqrt{n}},\,x_n+\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}\right)\subset B\left(x\,;\,\epsilon\right)$$

となる。また、式 (10) の $p_i,\,q_i$ の選び方により

$$x\in\left(p_1,\,q_1\right)\times\cdots\times\left(p_n,\,q_n\right)$$

となる。よって

$$x\in U\subset B\left(x\,;\,\epsilon\right)$$

となる

$$U=\left(p_1,\,q_1\right)\times\cdots\times\left(p_n,\,q_n\right)\in\mathfrak{B}'$$

が存在することから、[4] の【命題 2】(iii) により $\mathfrak{B}'$ は $\mathbb{R}^n$ の基底となる。ゆえに、端点 $p_i,\, q_i\,(i = 1, \cdots, n)$ がすべて有理数であるような開区間全体は $\mathbb{R}^n$ の 1 つの基底となる。■

【命題 2】により次の定理が成り立つ。

【定理 1】位相空間 $\mathbb{R}^n$ は第 2 可算公理を満たす。

【証明】【命題 2】により、$\mathbb{R}^n$ の有理点 x を中心とする有理数半径 r の開球体全体の集合

$$\mathfrak{B}' = \left\{ B\,(x\,;\,r)\ \middle|\ x \in \mathbb{Q}^n,\ r \in \mathbb{Q},\ r > 0 \right\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の 1 つの基底である。そこで、$\mathfrak{B}'$ に含まれる元（開球体）の個数を考えると、x の選び方は $(\mathrm{card}\,\mathbb{Q})^n$ 通り、r の選び方は $\mathrm{card}\,\mathbb{Q}$ 通りあるので

$$\begin{aligned}\mathrm{card}\,\mathfrak{B}' &= (\mathrm{card}\,\mathbb{Q})^n\,\mathrm{card}\,\mathbb{Q}\\ &= (\mathrm{card}\,\mathbb{Q})^{n+1}\end{aligned}$$

ここで、[8] の【系 2】により

$$\mathrm{card}\,\mathbb{Q} = \aleph_0$$

また、[9] の【定理 1】により

$$\aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0$$

であることから

$$\mathrm{card}\,\mathfrak{B}' = (\aleph_0)^{n+1} = \aleph_0$$

となる。よって、基底 $\mathfrak{B}'$ が可算の濃度をもつことから、【定義 1】により、位相空間 $\mathbb{R}^n$ は第 2 可算公理を満たす。■

【命題 1】、【命題 2】において、$n = 1$ とした場合において以下が成り立つ。

【命題 3】位相空間 $\mathbb{R}$ において

(i) $\mathbb{R}$ の開区間 $(a,\, b)$ の全体の集合は、$\mathbb{R}$ における 1 つの基底である。

(ii) $a,\, b \in \mathbb{Q}$ であるような $\mathbb{R}$ の開区間 $(a,\, b)$ 全体の集合は、$\mathbb{R}$ における 1 つの基底である。

(iii) $\mathbb{R}$ における位相（開集合系）の部分集合として

$$(a,\, \infty) \quad \text{および} \quad (-\infty,\, b)$$

の形の区間全体の集合は、$\mathbb{R}$ における 1 つの準基底である。

【証明】

(i) ： 開区間 $(a,\, b)$ は

$$(a,\, b) = \left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2},\, \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\right) = B\left(\frac{a+b}{2},\, \frac{b-a}{2}\right)$$

となり、中心 $x = \dfrac{a+b}{2}$、半径 $\epsilon = \dfrac{b-a}{2}$ の $n = 1$ における開球体として表すことができる。よって、【命題 1】により、$\mathbb{R}$ の開球体全体の集合は、$\mathbb{R}$ の 1 つの基底であることから、開区間 $(a,\, b)$ の全体の集合は $\mathbb{R}$ における 1 つの基底となる。

(ii) ： $a,\, b \in \mathbb{Q}$ であるような $\mathbb{R}$ の開区間 $(a,\, b)$ も同様に

$$(a,\, b) = \left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2},\, \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\right) = B\left(\frac{a+b}{2},\, \frac{b-a}{2}\right)$$

と表される。このとき、$a,\, b$ は有理数であるので、開球体の中心 $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$、半径 $r = \dfrac{b-a}{2}$ も有理数である。よって、【命題 2】により、$\mathbb{R}$ の有理点を中心とする有理数半径の開球体全体の集合は、$\mathbb{R}$ の 1 つの基底であることから、$a,\, b \in \mathbb{Q}$ であるような $\mathbb{R}$ の開区間 $(a,\, b)$ 全体の集合は $\mathbb{R}$ における 1 つの基底となる。

(iii) ： [6] の【命題 3】により $(a,\, \infty),\, (-\infty,\, b)$ は $\mathbb{R}$ における開集合であるので、$\mathbb{R}$ における位相 $\mathfrak{O}\,(\mathbb{R})$（開集合系）の部分集合として

$$(a,\, \infty) \quad \text{および} \quad (-\infty,\, b)$$

の形の区間全体の集合（これも、$a,\, b \in \mathbb{Q}$ であるようなものだけでもよい）

$$\mathfrak{M} = \{(-\infty,\, b),\, (a,\, \infty) \,|\, a,\, b \in \mathbb{R}\} \in \mathfrak{O}_{\mathbb{R}}$$

を考える。このとき、[10] の【定理 1】の式 (5) の

$$\mathfrak{M}_0 = \left\{ \bigcap_{i \in I} m_i \,\middle|\, m_i \in \mathfrak{M},\, I \text{ は有限集合} \right\}$$

には

$$(a,\, b) = (-\infty,\, b) \cap (a,\, \infty)$$

が含まれるので

$$(a,\, b) \in \mathfrak{M}_0$$

となる。また、[10] の式 (11) により $\mathfrak{M}_0 \subset \widetilde{\mathfrak{M}}$ であるので

$$(a,\, b) \in \widetilde{\mathfrak{M}} = \mathfrak{O}\,(\mathfrak{M})$$

となる。よって

$$(a,\, b) \in \mathfrak{B} \;\Rightarrow\; (a,\, b) \in \mathfrak{O}\,(\mathfrak{M})$$

より

$$\mathfrak{B} \subset \mathfrak{O}\,(\mathfrak{M})$$

すなわち、$\mathfrak{O}\,(\mathfrak{M})$ は基底 $\mathfrak{B}$ を含むような部分集合である。よって、[5] の【定義 2】により $\mathfrak{O}\,(\mathfrak{M})$ も $\mathbb{R}$ における 1 つの基底となる。したがって、[5] の【命題 3】および [10] の【命題 1】により

$$\begin{aligned} \mathfrak{O}\,(\mathbb{R}) &= \mathfrak{O}\,(\mathfrak{O}\,(\mathfrak{M})) \\ &= \mathfrak{O}\,(\mathfrak{M}) \end{aligned}$$

となる。したがって、[5] の【定義 1】により $\mathfrak{M}$ は位相 $\mathfrak{O}\,(\mathbb{R})$ の 1 つの準基底である。このとき

$$(a,\, b) \notin \mathfrak{M}$$

であるので、$\mathfrak{M}$ は基底ではない（基底の元を含まない）準基底の例となっている。■

参考文献

1) 松阪和夫　数学入門シリーズ 1 『集合・位相入門』 p.170 岩波書店（2018/11/06）

2)「$\mathbb{R}^n$ の開集合・閉集合」

（https://ieyasu03.web.fc2.com/Mathmatics/67_open_closed_set.html）

3) 「位相」

（https://ieyasu03.web.fc2.com/Mathmatics/71_topological.html）

4) 「開核・閉包の特徴づけと開集合系の基底」

（https://ieyasu03.web.fc2.com/Mathmatics/68_open_base.html）

5) 「位相の準基底・基底」

（https://ieyasu03.web.fc2.com/Mathmatics/80_basis.html）

6) 「問題： $\mathbb{R}^n$ における開集合、閉集合」

（https://ieyasu03.web.fc2.com/Mathmatics/70_problem_01.html）

7) 「n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ と距離」

（https://ieyasu03.web.fc2.com/Mathmatics/64_Euclid.html）

8) 「可算集合とその性質」

（https://ieyasu03.web.fc2.com/Mathmatics/19_countable_set.html）

9) 「無限の濃度に関する演算」

（https://ieyasu03.web.fc2.com/Mathmatics/24_operation_of_uncount.html）

10) 「位相の生成」

（https://ieyasu03.web.fc2.com/Mathmatics/79_generation.html）