非可算集合

1. 非可算集合

「可算集合とその性質」[1] における【系 2】で示したように、$\mathbb{Z}$ や $\mathbb{Q}$ は可算集合である。しかし、無限集合のうちには、可算でないものも存在する（いいかえれば、$\aleph_0$ よりも大きい無限の濃度が存在する）。それを以下のように定義する。

【定義 1】非可算集合
可算でないような無限集合、すなわち $\aleph_0$ よりも大きい濃度をもつような集合を、非可算集合という。

実際、実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は可算集合ではないことが示され、次の定理が成り立つ。

【定理 1】実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の濃度、すなわち、連続の濃度 $\aleph$ は可算の濃度 $\aleph_0$ よりも大きい：

$$\aleph_0 < \aleph \tag{1}$$

この定理は、「実数の連続性」と呼ばれる $\mathbb{R}$ の基本的性質にもとづいて、いろいろの方法で証明される。しかし、この性質を数学的に整理した形に述べることは後にゆずる。ここでは、実数が十進法による無限小数として表されるという周知の事実（このことも、実は「実数の連続性」から導かれる）を用いて、この定理を証明する。

【証明】「集合の対等」[2] の【例 5】で示したように、実数の任意の開区間は $\mathbb{R}$ と対等である。したがって、たとえば開区間 $J = (0, 1)$ も連続の濃度 $\aleph$ をもつ。「集合の濃度」[3] の【定義 2】より、$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ であり、$\mathbb{N}$ は $\mathbb{R}$ の部分集合である自分自身と対等であるので、$\aleph_0 \leq \aleph$ である。したがって、式 (1) を示すには、$\aleph_0 \neq \aleph$ であること、すなわち $\mathbb{N}$ と J とが対等でないことを証明すれば十分である。

J の任意の元（すなわち、0 より大きく 1 より小さい任意の実数）は、十進法の無限小数として

$$0.a_1a_2\cdots a_n\cdots \quad (\text{各 } a_i \text{ は 0 から 9 までの整数}) \tag{2}$$

の形に表される。ただし、たとえば

$$0.25000\cdots = 0.24999\cdots \tag{3}$$

のように 2 通りの表し方があるもの（いわゆる「有限小数」）については、記法に一意性をもたらすため、いつも前者の記法を採用することとする（注 1)。逆に。式 (2) の形の無限小数で、$a_n \neq 0$ となる n が少なくとも 1 つ存在し、また 9 が無限に続くことがないようなものは、それぞれ 1 つの J の元を表し、かつ、そのような 2 つの無限小数

$$0.a_1a_2\cdots a_n\cdots \text{ と } 0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$$

が同じ J の元を表すのは、明らかに、すべての n に対して

$$a_n = b_n$$

のときに限る。

いま、f を $\mathbb{N}$ から J への任意の 1 つの写像とする。すなわち

$$f : \mathbb{N} \to J$$

ここでの目標は、f が全射ではないこと、すなわち、f の値域

$$\operatorname{ran} f = \{f(1), f(2), \cdots, f(n), \cdots\}$$

が J 全体とはなり得ないことの証明である。$\operatorname{ran} f$ の各元を、（上の約束に従って）無限小数で表したものをそれぞれ

$$\begin{aligned} f(1) &= 0.a_1^{(1)} a_2^{(1)} \cdots a_n^{(1)} \cdots \\ f(2) &= 0.a_1^{(2)} a_2^{(2)} \cdots a_n^{(2)} \cdots \\ &\vdots \\ f(n) &= 0.a_1^{(n)} a_2^{(n)} \cdots a_n^{(n)} \cdots \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4}$$

とする。そこで、各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、b_n を

$$b_n = \begin{cases} 1 & (a_n^{(n)} \text{ が偶数のとき}) \\ 2 & (a_n^{(n)} \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

によって定め

$$\beta = 0.b_1 b_2 \cdots b_n \cdots$$

とおく。そうすれば、もちろん β も 0 より大きく 1 より小さい実数、すなわち J の元である。

$$\beta \in J$$

しかしながら、どの自然数 n に対しても、b_n の定め方によって、β の小数第 n 位と $f(n)$ の小数第 n 位とは相異なる。したがって、どの $n \in \mathbb{N}$ に対しても β は $f(n)$ と等しくない。ゆえに

$$\beta \notin \operatorname{ran} f$$

である。よって、$\operatorname{ran} f$ は J 全体とは一致しないことが示された。（注 2）■

2. 巾集合の濃度

前節で、連続の濃度 $\aleph$ は可算の濃度 $\aleph_0$ よりも大きいことを示した。実は、もっと一般に、いかなる濃度に対しても、それよりさらに大きい濃度が必ず存在すること（したがって、結局、「いくらでも大きい濃度が存在すること」）が、次の定理によって保証される。

【定理 2】 M を任意の集合とするとき、その巾集合 $\mathfrak{P}(M)$ の濃度は M の濃度よりも大きい、すなわち

$$\operatorname{card} M < \operatorname{card} \mathfrak{P}(M)$$

【証明】 M の各元 a を $\mathfrak{P}(M)$ の元 $\{a\}$ へ対応させる写像は、明らかに M から $\mathfrak{P}(M)$ への単射である。したがって、[3] の【定義 2】により

$$\operatorname{card} M \leq \operatorname{card} \mathfrak{P}(M)$$

が得られる。

次に、$\operatorname{card} M \neq \operatorname{card} \mathfrak{P}(M)$ であること、すなわち、M と $\mathfrak{P}(M)$ とは対等ではないことを示せばよい。それには、M から $\mathfrak{P}(M)$ への任意の写像がけっして全射とはなり得ないことを証明すればよい。

f を M から $\mathfrak{P}(M)$ へに 1 つの写像とする。そのとき、M の各元 a の f による像 $f(a)$ は $\mathfrak{P}(M)$ の元、すなわち、M の部分集合である。

$$\begin{aligned} f : M &\to \mathfrak{P}(M) \\ a &\mapsto M \text{ の部分集合} \end{aligned}$$

したがって、M の任意の元 a に対し

$$a \in f(a) \text{ あるいは } a \in M - f(a) \text{ (すなわち } a \notin f(a))$$

のいずれか一方しかも一方のみが必ず成り立つ。いま、$a \notin f(a)$ であるような M の元 a 全体のつくる M の部分集合を B とする。すなわち

$$B = \{x \mid x \in M,\, x \notin f(x)\}$$

そうすれば、M のどの元 a に対しても $f(a) \neq B$ であることが、次のように示される。

a を M の任意の 1 つの元とすれば、$a \in f(a)$ であるか $a \notin f(a)$ であるかのいずれかである。そこで、それぞれの場合について考える。

(i) $a \in f(a)$ の場合 : a は条件 $a \notin f(a)$ を満足しないことになるから、$a \notin B$ となる。したがって、2 つの集合 $f(a)$ と B の一方は a を含み、他方は a を含まないから、$f(a) \neq B$ となる。

(ii) $a \notin f(a)$ の場合 : a は条件 $a \notin f(a)$ を満足することになるから、$a \in B$ となる。したがって、2 つの集合 $f(a)$ と B の一方は a を含み、他方は a を含まないから、$f(a) \neq B$ となる。

以上の (i), (ii) により、任意の $a \in M$ に対して $f(a) \notin B$ であることが証明させた。これは、B が f の値域 $\operatorname{ran} f$ に属さないことを意味するから、f は全射ではない。■

(注 1) 有限小数について

有限小数を無限小数を用いて

$$1.0 = 0.99999\cdots$$

と表すことができる。このとき、左辺では小数点以下無限に 9 が続くものとする。実際

$$x = 0.99999\cdots$$

とおき、両辺を 10 倍すれば

$$\begin{aligned} 10x &= 9.99999\cdots && (5) \\ &= 9 + 0.99999\cdots && (6) \end{aligned}$$

より

$$10x = 9 + x$$

となり

$$x = 1$$

を得る。この関係が成り立つのは、小数点以下無限に 9 が続くことから、式 (5) の左辺が式 (6) のように表せることによる。いくら長くても有限個である場合には、このようなことは起こらない。このことにより、式 (3) で示したように、有限小数に対しては 2 通りの表し方が存在することになる。

（注 2）対角線論法

【定理 1】の証明の要点は、式 (4) の「対角線」からつくられる小数

$$0.a_1^{(1)}a_2^{(2)}\cdots a_n^{(n)}\cdots$$

に注目して、これとすべての小数位において異なる小数 β を考えるところになる。この証明で用いたような論法は、しばしば（カントルの）対角線論法とよばれる。[4]

参考文献

1)「可算集合とその性質」
（https://ieyasu03.web.fc2.com/Mathmatics/19_countable_set.html）

2)「集合の対等」
(https://ieyasu03.web.fc2.com/Mathmatics/15_set_equipotent.html)

3)「集合の濃度」
（https://ieyasu03.web.fc2.com/Mathmatics/17_cardinality.html）

4）松阪和夫　数学入門シリーズ 1　『集合・位相入門』 p.74 岩波書店（2018/11/06）