コンパクト性とハウスドルフ空間

コンパクト性が特に重要であるのは、いわゆるハウスドルフ（Hausdroff）空間の場合である [1]。ハウスドルフ空間は次のように定義される。

【定義 1】（ハウスドルフ（Hausdroff）空間）
位相空間 S が次の性質 (H) を満たすとき、S を**ハウスドルフ（Hausdroff）空間**という。

(H)　S の任意の相異なる 2 点 x, y に対して

$$U \cap V = \emptyset$$

となる x, y の（開）近傍

$$U \in \boldsymbol{V}(x), \quad V \in \boldsymbol{V}(y)$$

が存在する。

【定義 1】により、S がハウスドルフ空間であれば、S の相異なる 2 点が必ず互いに素な近傍によって“分離”されることになる。なお、この場合、2 点 $x, y\,(x \neq y)$ を“分離”する近傍 U, V として、x, y の開近傍をとることができる。

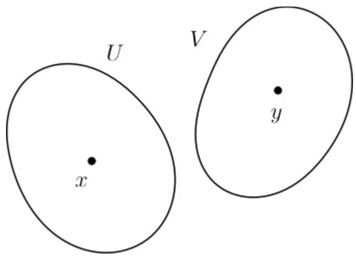

図 1　（開）近傍 U, Y

ハウスドルフ空間に関して以下が成り立つ。

【命題 1】位相空間 $\mathbb{R}^n$ はハウスドルフ空間である。

【証明】x, y を $\mathbb{R}^n$ の相異なる 2 点とし、$d\,(x, y) = \rho$ とする。このとき

$$B\left(x\,;\,\frac{\rho}{2}\right) \in \boldsymbol{V}(x), \quad B\left(y\,;\,\frac{\rho}{2}\right) \in \boldsymbol{V}(y)$$

とすれば

$$B\left(x\,;\,\frac{\rho}{2}\right) \cap B\left(y\,;\,\frac{\rho}{2}\right) = \emptyset$$

となるので、【定義 1】により $\mathbb{R}^n$ はハウスドルフ空間である。

【命題 2】任意のハウスドルフ空間 S において、ただ 1 点のみから成る集合は S の閉集合である。すなわち、a を S の任意の点とするとき、$\{a\}$ は S の閉集合である。

【証明】S の任意の点 a を固定する。[2] の【命題 1】により、$S - \{a\}$ が S の開集合となることを示せばよい。

そこで、$S-\{a\}$ の任意の点を x とする。$x \in S-\{a\}$ かつ $a \in S$ であるので、$x \neq a$ となる。S はハウスドルフ空間であるので、【定義 1】により、互いに素な a, x の開近傍がとれる。すなわち

$$x \in U_x, \quad a \in V_x, \quad U_x \cap V_x = \emptyset$$

を満たす開集合 U_x, V_x が存在する。なお、$x \in S-\{a\}$ をとるごとに上の開近傍が定まるため、その依存性を明示的に U_x, V_x と書いている。

このとき

$$U_x \subset S-\{a\}$$

であるので、$S-\{a\}$ に属するすべての点について、その開近傍の和集合をとれば

$$\bigcup_{x \in S-\{a\}} U_x \ \subset \ S-\{a\} \tag{1}$$

となる。一方、$x \in S-\{a\}$ をとるごとに開近傍 U_x が定まるので

$$x \in \bigcup_{y \in S-\{a\}} U_y$$

すなわち

$$S-\{a\} \ \subset \bigcup_{x \in S-\{a\}} U_x \tag{2}$$

よって、式 (1)、(2) により

$$S-\{a\} = \bigcup_{x \in S-\{a\}} U_x$$

となる。以上により、$S-\{a\}$ は開集合の和集合として表されるので、[3] の【定義 1】の (Oiii) により、S の開集合となる。

よって、$S-\{a\}$ が S の開集合であるので、[2] の【命題 1】により、その補集合である $\{a\}$ は S の閉集合となる。■

【命題 3】ハウスドルフ空間の任意の部分空間はハウスドルフ空間である。

【証明】S をハウスドルフ空間とし、S の空でない部分集合を M とする。M の任意の相異なる 2 点を x, y とすれば、S がハウスドルフ空間であるので、【定義 1】により

$$U_x \cap U_y = \emptyset$$

となる x, y の開近傍が存在する。このとき

$$(M \cap U_x) \cap (M \cap U_y) = M \cap (U_x \cap U_y) = \emptyset$$

となる。ここで、[4] の【命題 1】により

$$M \cap U_x, \quad M \cap U_y$$

は、M における開集合であり、それぞれ x, y を含むので、M における開近傍となっている。よって、M において【定義 1】の条件 (H) が成り立つので、M はハウスドルフ空間である。■

コンパクト空間とハウスドルフ空間に関して、以下の定理が成り立つ。

【定理 1】ハウスドルフ空間 S の部分集合 M がコンパクトならば、M は S の閉集合である。

【証明】[2] の【命題 1】により、M の補集合 $O=S-M$ が開集合であることを示せばよい。そのためには、[5] の【定理 1】により、$\forall x \in O$ に対して O が x の近傍、すなわち

$$\forall x \in O \ \Rightarrow \ x \in O^\circ \tag{3}$$

となることを示せばよい。このとき、[6] の【命題 1】により $O^\circ \subset O$、[5] の【命題 1】により O° は x の近傍、$O=S-M$ により $O^\circ \cap M = \emptyset$ となる。よって、式 (3) の関係は

> (*)　x を O の任意の 1 点とするとき、x の近傍 U で、$U \subset O$、すなわち $U \cap M = \emptyset$ となるものが存在する。

と表すことができる。以下では、(*) の関係が成り立つことを示す。

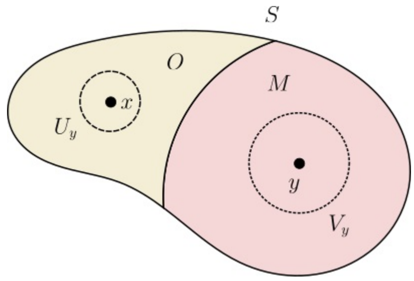

図 2　S の部分集合 M とその補集合 $O=S-M$

いま、x を O の任意に固定された 1 点とする。y を M の任意の点とすれば、$x \neq y$ で、S はハウスドルフ空間であるので【定義 1】により、x, y の開近傍で互いに素なものがある。それらの開近傍は一般に点 y に依存して定めるから、それらを U_x, V_y と書くことにする。すなわち

$$x \in U_y, \quad y \in V_y, \quad U_y \cap V_y = \emptyset$$

このとき、$V_y \subset M$ であるので集合 $\{V_y \,|, y \in M\}$ は M の（S における）開被覆、すなわち

$$M \subset \bigcup_{y \in M} V_y$$

となるが、M はコンパクトであるから、[7] の【補題 1】により M の適当な有限個の点 $y_1, \cdots, y_n$ をとって

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i} \tag{4}$$

を成り立たせることができる。そこで

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$$

とおけば、[3] の【命題 1】により、有限個の開集合の共通部分は開集合であるので U は開集合である。また、$x \in U$ であるので、U は x の開近傍となる。このとき、任意の $i=1, \cdots, n$ に対して

$$U \subset U_{y_i}, \quad U_{y_i} \cap V_{y_i} = \emptyset$$

であるから、[8] の式 (21) により

$$U \cap V_{y_i} \ \subset \ U_{y_i} \cap V_{y_i} = \emptyset$$

となる。したがって、[9] の【問題 1】の式 (4) を用いれば

$$U \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i} \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (U \cap V_{y_i}) = \emptyset$$

となる。よって、式 (4) および [8] の式 (21) により

$$U \cap M \subset U \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i} \right) = \emptyset$$

すなわち

$$U \cap M = \emptyset$$

となる。よって、$(*)$ の関係が成り立つことから、題意が示された。■

【系 1】コンパクト空間 S からハウスドルフ空間 S' への連続写像は閉写像である。

【証明】S をコンパクト空間とし、M を S の閉集合とすれば、[7] の【定理 3】により M はコンパクトである。ここで、f を S から S' への連続写像とすれば、[10] の【系 1】により $f(M)$ は S' のコンパクトな部分集合となる。よって、【定理 1】により $f(M)$ は S' の閉集合となる。したがって、[11] の【定義 1】により f は閉写像である。■

【定理 2】S がコンパクト空間、S' がハウスドルフ空間のとき、$f : S \to S'$ が連続な全単射ならば、f は同相写像である。(したがって、S, S' は同相)

【証明】f はコンパクト空間 S からハウスドルフ空間 S' への連続写像であるので、【系 1】により f は閉写像である。よって、f は全単射かつ連続かつ閉写像であるので、[12] の【定義 1'】により同相写像である。また、S から S' への同相写像 f が存在することから、[12] の【定義 2】により S と S' は同相となる。■

参考文献

1) 松阪和夫　数学入門シリーズ 1 『集合・位相入門』 p.214 岩波書店(2018/11/06)

2) 「閉集合・閉包」
(https://ieyasu03.web.fc2.com/Mathmatics/73_closed_set.html)

3) 「位相」
(https://ieyasu03.web.fc2.com/Mathmatics/71_topological.html)

4) 「相対位相」
(https://ieyasu03.web.fc2.com/Mathmatics/91_relative_top.html)

5) 「近傍」
(https://ieyasu03.web.fc2.com/Mathmatics/75_neighborhood.html)

6) 「開集合・開核」
(https://ieyasu03.web.fc2.com/Mathmatics/72_open_set.html)

7) 「コンパクト位相空間」
(https://ieyasu03.web.fc2.com/Mathmatics/103_compact.html)

8) 「集合の演算」
(https://ieyasu03.web.fc2.com/Mathmatics/10_set_op.html)

9) 「問題：写像・集合族・直積・選択公理」
(https://ieyasu03.web.fc2.com/Mathmatics/12_problem_01.html)

10) 「コンパクト空間の連続像とチコノフの定理」

（https://ieyasu03.web.fc2.com/Mathmatics/104_Tychonoff.html）
11) 「開写像・閉写像」
（https://ieyasu03.web.fc2.com/Mathmatics/87_open_closed_map.html）
12) 「同相写像」
（https://ieyasu03.web.fc2.com/Mathmatics/88_homeomorphism.html）