選択公理

「直積と選択公理」[1] において、直積を用いた選択公理について述べた。その際、同値な表現がいくつか存在することを指摘した。以下では、選択公理の同値な表現の主なものについて文献 [2] を参考にしてまとめる。大まかには、選択集合を用いるか、選択関数を用いるか、あるいは直積を用いるかで区別される。

1. 選択公理の同値な表現

選択公理に対する同値な表現を以下に示す（これ以外にも同値な表現は存在する）。

【定理】 以下の 3 つの命題は同値である。

- (AC1) : $\mathfrak{U}$ を空でない集合系とする。もし $\emptyset \notin \mathfrak{U}$ であり、$\mathfrak{U}$ に属する集合が互いに素であれば、集合 $A \subset \bigcup \mathfrak{U}$ で、すべての $X \in \mathfrak{U}$ に対して $|A \cap X| = 1$ となるものが存在する。この集合 A を集合系 $\mathfrak{U}$ の選択集合という（$A \notin \mathfrak{U}$)。
- (AC2) : $\mathfrak{U}$ を空でない集合系とする。もし $\emptyset \notin \mathfrak{U}$ であれば、写像 $f : \mathfrak{U} \to \bigcup \mathfrak{U}$ ですべての $X \in \mathfrak{U}$ に対して $f(X) \in X$ となるものが存在する。この写像 f を集合系 $\mathfrak{U}$ の選択関数という。
- (AC3) : 集合族 $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ において、すべての $\lambda \in \Lambda$ に対して $A_\lambda \neq \emptyset$ であれば、直積は $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ を満たす。

(AC1) と (AC2) において、集合系 $\mathfrak{U}$ 自身が空集合ならば命題は自明に成り立つので、$\mathfrak{U}$ は単に集合系としても同じことである（命題 $P \Rightarrow Q$ において P が偽であれば、Q の真偽によらず命題は真)。また、(AC3) は「直積と選択公理」における表現である。集合族を扱っているので集合族の定義によって $\Lambda \neq \phi$ である。

(AC1) の主張を図 1 にベン図で表す。$X_1, X_2, \cdots$ は互いに素な集合であり、A はすべての $X \in \mathfrak{U}$ に対して $|A \cap X| = 1$ を満たす集合系 $\mathfrak{U}$ の選択集合である。

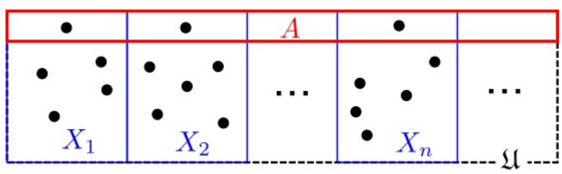

図 1 (AC1) における選択集合

同様に、(AC2) の主張を図 2 にベン図で示す。選択関数 f は集合系 $\mathfrak{U}$ の元である集合 X に対して、集合 $\bigcup \mathfrak{U}$ の元 $x \in X$ を対応させる写像である。

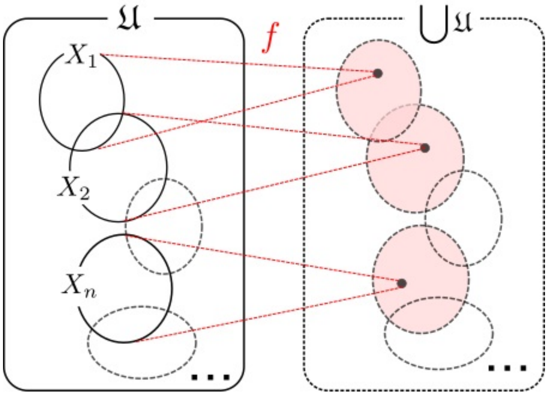

図 2　(AC2) における選択関数

【証明】

(AC1)⇒(AC2)：$\mathfrak{U}$ を空でない集合系で、$\emptyset \notin \mathfrak{U}$ を満たすものとする。集合 $X \in \mathfrak{U}$ に対して、$\mathfrak{U} \times \bigcup\mathfrak{U}$ を考える。$\bigcup\mathfrak{U}$ は 1 つの集合であるので、これは（集合、元）の順序対の全体からなる集合である。この $\mathfrak{U} \times \bigcup\mathfrak{U}$ の部分集合を

$$\tilde{X} = \{(X,\, x) \,|\, x \in X\} \tag{1}$$

で定義する。すなわち、$\tilde{X}$ は（集合、その集合の 1 つの元）からなる順序対全体からなる集合である。

仮定から $\mathfrak{U}$ 自身は空集合ではなく、また、$\emptyset \notin \mathfrak{U}$ であるから、集合系

$$\tilde{\mathfrak{U}} = \{\tilde{X} \,|\, X \in \mathfrak{U}\}$$

も空集合ではなく、$\emptyset \notin \tilde{\mathfrak{U}}$ である。しかも、構成から $\tilde{\mathfrak{U}}$ に属する異なる 2 つの元は互いに素である。

なぜなら、$\tilde{X}, \tilde{Y} \in \tilde{\mathfrak{U}}$ かつ $\tilde{X} \neq \tilde{Y}$ で $\tilde{X} \cap \tilde{Y} \neq \emptyset$ とすれば $(X,\, x) = (Y,\, y)$ となる元が存在し、$X = Y$ すなわち $\tilde{X} = \tilde{Y}$ となり $\tilde{X} \neq \tilde{Y}$ に矛盾することによる。

そうすると、$\tilde{\mathfrak{U}}$ が (AC1) の仮定を満たすので、選択集合

$$\tilde{A} \subset \bigcup\tilde{\mathfrak{U}} = \bigcup_{X \in \mathfrak{U}} \tilde{X}$$

が存在する。つまり、すべての $\tilde{X} \in \tilde{\mathfrak{U}}$ に対して

$$|\tilde{A} \cap \tilde{X}| = 1 \tag{2}$$

が成り立つ。ただし

$$\tilde{A} = \{(A,\, a) \,|\, a \in A\},\ A \notin \mathfrak{U}$$

である。式 (2) より集合 $\tilde{X}$ を 1 つ定めると集合 $\tilde{A}$ の元が 1 つ定まるので、$\tilde{A} \cap \tilde{X}$ のただ 1 つの元は

$$(X,\, a)$$

の形となる。$A \subset \bigcup\mathfrak{U}$ より $a \in \bigcup\mathfrak{U}$ であることから写像 f を

$$\begin{array}{c} f : \mathfrak{U} \to \cup\mathfrak{U} \\ \ \ \ \Psi \qquad \Psi \\ X \mapsto a \end{array}$$

と定義すれば、明らかに $f(X) = a \in X$ が成り立つ。つまり、f は選択関数になっている。

(AC2)⇒(AC3)：$(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を添数集合 Λ 上の集合族で、すべての $\lambda \in \Lambda$ に対して $A_\lambda \neq \emptyset$ であるものとする。対応する集合系を $\mathfrak{U} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ とおく。集合族の定義から、もとより $\Lambda \neq \emptyset$ であるから $\mathfrak{U}$ 自身は空でない集合系であり、仮定から $\emptyset \notin \mathfrak{U}$ である。したがって、$\mathfrak{U}$ が (AC2) の仮定を満たすので、選択関数

$$f : \mathfrak{U} \to \bigcup\mathfrak{U} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

が存在する。すなわち、すべての $X \in \mathfrak{U}$ に対して

$$f(X) \in X$$

となる。

ここで、写像

$$g : \mathit{\Lambda} \to \bigcup_{\lambda \in \mathit{\Lambda}} A_\lambda$$

を

$$g(\lambda) = f(A_\lambda)$$

で定義すると

$$g(\lambda) \in A_\lambda$$

を満たす。したがって、$g(\lambda)$ は直積の定義 [1] を満たす写像であるので

$$g(\lambda) \in \prod_{\lambda \in \mathit{\Lambda}} A_\lambda$$

である。ゆえに、少なくとも 1 つ $g(\lambda)$ という元が存在するので

$$\prod_{\lambda \in \mathit{\Lambda}} A_\lambda \neq \emptyset$$

である。

(AC3)⇒(AC1)：$\mathfrak{U}$ を空でない集合系で、$\emptyset \notin \mathfrak{U}$ であり、$\mathfrak{U}$ に属する異なる 2 つの集合が互いに素であるものとする（(AC1) の仮定)。集合系 $\mathfrak{U}$ を $\mathfrak{U}$ 自身を添数集合とする集合族とみなすと

$$X \in \mathfrak{U}, \quad \lambda \in \mathit{\Lambda} = \mathfrak{U}$$

として

$$\mathfrak{U}_\lambda = X, \quad \lambda = X$$

とおけば、集合族 $(\mathfrak{U}_\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{U}}$ は

$$(X)_{X \in \mathfrak{U}}$$

と表すことができる。この X に対して直積

$$\prod_{X \in \mathfrak{U}} X \tag{3}$$

を考える。仮定 $\emptyset \notin \mathfrak{U}$ から、すべての $X \in \mathfrak{U}$ は $X \neq \emptyset$ を満たすので、(AC3) より式 (3) は空ではない。したがって、直積の定義 [1] より写像

$$f : \mathfrak{U} \to \bigcup \mathfrak{U} = \bigcup_{X \in \mathfrak{U}} X, \quad \forall X \in \mathfrak{U},\, f(X) \in X \tag{4}$$

を満たすものが存在する。

像集合 $A = f(\mathfrak{U})$ が選択集合になることを示す。式 (4) より、$\forall X \in \mathfrak{U}, f(X) \in X$ であるので $f(\mathfrak{U}) \subset \bigcup_{X \in \mathfrak{U}} X = \bigcup \mathfrak{U}$、すなわち、$A \subset \bigcup \mathfrak{U}$ である。したがって、$|A \cap \mathfrak{U}| = 1$ を示せばよい。

$x \in A \cap X$ とする。$x \in A$ であるので $x \in A = f(\mathfrak{U})$ から適当な $Y \in \mathfrak{U}$ によって

$$x = f(Y) \tag{5}$$

となる。一方、直積の定義 [1] より

$$f(Y) \in Y$$

であるから

$$x \in Y$$

すなわち、$x \in A$ かつ $x \in Y$ より

$$x \in Y \cap X$$

となる。仮定より、$\mathfrak{U}$ に属する集合が互いに素であり、かつ、式 (4) の写像 f は存在するので、$X = Y$ となる。したがって、式 (5) より

$$x = f(X) \in X$$

がわかる。ゆえに

$$A \cap X \subset \{f(X)\} \tag{6}$$

となる。ここで、$f(X)$ は X の 1 つの元である。

逆に、$x \in \{f(X)\}$ とすれば、$x = f(X) \in X$ である。また、

$$A = f(\mathfrak{U}) \ni f(X) = x$$

であるので、$x \in A$ より

$$x \in A \cap X$$

したがって、$x \in \{f(X)\}$ ならば $x \in A \cap X$ より

$$\{f(X)\} \subset A \cap X \tag{7}$$

となる。

ゆえに、式 (6)、(7) より

$$A \cap X = \{f(X)\}$$

となり、$A \cap X$ の元は $f(X)$ の 1 つのみであるので

$$|A \cap X| = 1$$

を得る。以上により、A が選択集合であることが示された。■

2. 写像による表現

写像の言葉を用いて選択公理を表現することも可能であり、以下の定理が成り立つ。

【定理】次の 2 つの命題は同値である。

(i) 選択公理

(ii) X, Y を集合として、$Y \neq \emptyset$ とする。全射 $f : X \to Y$ に対して、(f の右逆写像)単射 $g : Y \to X$ で $f \circ g = i_Y$ となるものが存在する。

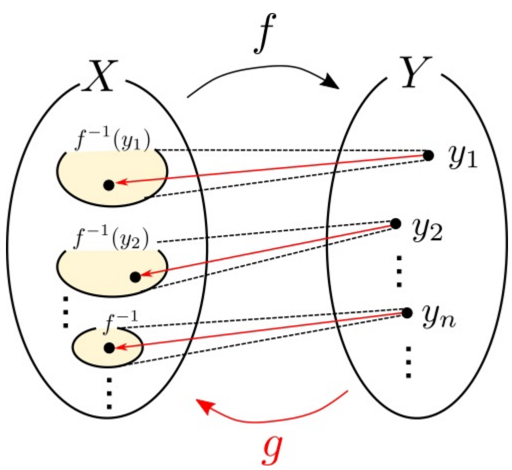

図 3　選択公理と全射写像の関係

【証明】

(i)⇒(ii)：$Y \neq \emptyset$ なので $(f^{-1}(y))_{y \in Y}$ は Y を添数集合とする集合族になる。ここで、$f^{-1}(y)$ は $y \in Y$ の逆像である。f は全射であるから、すべての $y \in Y$ に対して $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ である。したがって、選択公理 (AC3) により

$$\prod_{y \in Y} f^{-1}(y) \neq \emptyset$$

であるから、そこから 1 つの元 g をとる。直積の定義から、g は

$$g : Y \to \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y) = X$$

なる写像で、すべての $y \in Y$ に対して

$$g(y) \in f^{-1}(y)$$

を満たす。そうすると、逆像の定義から

$$f(g(y)) \in f(f^{-1}(y)) = \{y\}$$

すなわち

$$f(g(y)) = y$$

であるので

$$f \circ g = i_Y$$

が成り立つ。ここで、恒等写像 i_Y は単射であるから g も単射である（注 1）。ゆえに、単射 $g : Y \to X$ で $f \circ g = i_Y$ となるものが存在する。

(ii)⇒(i)：(AC1) を証明する。$\mathfrak{U}$ を空でない集合系で、$\emptyset \notin \mathfrak{U}$ であり、$\mathfrak{U}$ に属する異なる 2 つの集合が互いに素であるものとする（(AC1) の仮定)。このとき、$\bigcup \mathfrak{U} \neq \emptyset$ である。さらに、$\mathfrak{U}$ に属する集合は互いに素であるので、$x \in \bigcup \mathfrak{U}$ に対して、$x \in X$ となるような $X \in \mathfrak{U}$ がただ 1 つ存在する。したがって、写像 f を

$$\begin{array}{rcl} f : \bigcup \mathfrak{U} & \to & \mathfrak{U} \\ \cup\!\!\!\!\!\!\;\;\; & & \cup\!\!\!\!\!\!\;\;\; \\ x & \mapsto & X \end{array} \tag{8}$$

と定義すれば、f は明らかに全射である（すべての X に対して、そのもととなる x が必ず存在する)。そうすると、(ii) によって、単射

$$g : \mathfrak{U} \to \bigcup \mathfrak{U} \text{ かつ } f \circ g = i_y \tag{9}$$

なるものが存在する。

ここで、像集合 $A = g(\mathfrak{U})$ が選択集合になることを示す。式 (9) より $\bigcup \mathfrak{U}$ は $g(\mathfrak{U})$ の値域であるので、$A \subset \bigcup \mathfrak{U}$ である。よって、任意の $X \in \mathfrak{U}$ に対して $|A \cap X| = 1$ を示す。

$x \in A \cap X$ とすると、$x \in A$ であるので $x \in A = g(\mathfrak{U})$ から適当な $Y \in \mathfrak{U}$ によって

$$x = g(Y) \tag{10}$$

となる。式 (8)-(10) より

$$f(x) = f(g(Y)) = Y$$

となり、式 (8) の写像 f の性質から

$$x \in Y$$

となる。そうすると、仮定の $x \in A \cap X$ より $x \in X$ と合せると

$$x \in X \cap Y$$

とわかる。$\mathfrak{U}$ は互いに素な集合からなる集合系であるので、$X = Y$ である。よって

$$x = g(X)$$

である。このことから

$$A \cap X \subset \{g(X)\} \tag{11}$$

が示された。

逆に、$x \in \{g(X)\}$ とすれば、$x = g(X)$ であり

$$f(x) = f(g(X)) = X$$

であるので、式 (8) の写像 f の性質より

$$x \in X$$

である。また、

$$A = g(\mathfrak{U}) \ni g(X) = x$$

であるので、$x \in A$ となる。したがって、$x \in X$ かつ $x \in A$ であるので

$$x \in A \cap X$$

となる。このことから

$$\{g(X)\} \subset A \cap X \tag{12}$$

となる。

式 (11)、(12) より

$$A \cap X = \{g(X)\}$$

となり、$A \cap X$ の元は $g(X)$ の 1 つのみである。したがって、$A \subset \bigcup \mathfrak{U}$ であり、すべての $X \in \mathfrak{U}$ に対して

$$|A \cap X| = 1$$

であることから、A は選択集合である。■

3. 選択公理の難しさ

選択公理を正確に理解することはなかなか難しい [2]。

「(AC1)：$\mathfrak{U}$ を空でない集合系とする。もし $\emptyset \notin \mathfrak{U}$ であり、$\mathfrak{U}$ に属する集合が互いに素であれば、集合 $A \subset \bigcup \mathfrak{U}$ で、すべての $X \in \mathfrak{U}$ に対して $|A \cap X| = 1$ となるものが存在する。この集合 A を集合系 $\mathfrak{U}$ の選択集合という（$A \notin \mathfrak{U}$)。」

を数学の記号や用語を柔らかくして言い換えると

「(AC1)：いずれも空ではなく、互いに素な集合からなる集合系が与えられたとき、各集合から元を 1 つずつ取り出すことができる。」

となる。しかしながら、このような言い方には曖昧な点が含まれてしまう。「元を 1 つずつ取り出す」という表現から日常的な動作を思い浮かべると、数学とは関係のない状況をいろいろと想像してします。また、{できる」「できない」の違いも考えだすと訳が分からなくなってしまう。数学の用語をきちんと

使えば避けられるような誤解も生じやすい。このようなことから平易な言葉で選択公理を述べるのは好ましくない。

(AC1) において集合系が有限個の集合からなるならば、その主張は選択公理とは関係なく成り立つ。このとき集合系を形成する個々の集合が有限集合であるか無限集合であるかは関係ない。

選択公理が必要になるのは、考えている集合系が無限個の集合からなるときである。個々の集合の大きさには関係なく、各集合がたった 2 個の元からなる場合でも、一般には選択公理が必要である。しかしながら、集合系が無限個の集合からなるときでも選択公理が不要な場合もある。たとえば

$$\varLambda \subset \mathbb{R} \text{ とする。このとき } \prod_{\lambda\in\varLambda}[\lambda,\, \lambda+1] \neq \emptyset$$

に対して選択公理は不要である。実際

$$f(\lambda) = \lambda \text{ とすれば } f\,:\, \varLambda \to \bigcup_{\lambda\in\varLambda}[\lambda,\, \lambda+1]$$

となる選択関数を具体的に 1 つ定めることができ、直積 $\prod_{\lambda\in\varLambda}[\lambda,\, \lambda+1]$ には元 f が存在するので空集合ではない。このように選択関数を具体的にかける場合には無限個の集合に対しても選択公理は不要である。

選択公理が言っていることは、どんなに複雑でたくさんの集合からなる集合系が与えられたとしても、それぞれの集合に対してその「元を 1 つ対応させる規則が存在する」ということである。このことを「元を 1 つずつ取り出すことができる」と言い換えてもよいが、作業能力のことを言っているのではない。

また、選択公理は前提とされているので、定理、命題等の証明において、選択公理の使用が明記されたいない場合もあるので注意が必要である。

（注 1）　$f\circ g = i$ ならば g は単射：i は恒等写像であるので

$$f\circ g(a) = i(a) = a$$
$$f\circ g(b) = i(b) = b$$

ここで

$$g(a) = g(b)$$

とすれば

$$f\circ g(a) = f\circ g(b)$$

より

$$a = b$$

となり、g は単射となる。

（注 2）本章では、松阪和夫「集合・位相入門」[3] に従って集合系と集合族を

集合系　：　集合の集合

集合族　：　添数集合から集合系への写像

として定義したが、文献 [2,4] では

集合族　：　集合の集合

集合系　：　添数集合から集合族への写像

と定義している。

参考文献

1)「直積と選択公理」

（https://ieyasu03.web.fc2.com/Mathmatics/02_direct_product.html）

2）第 11 章 選択公理

（https://www.math.is.tohoku.ac.jp/~obata/student/subject/file/2018-11_AC.pdf）

3) 松阪和夫　数学入門シリーズ 1　『集合・位相入門』　岩波書店（2018/11/06）

4）内田伏一　数学シリーズ　『集合と位相』　増補新装版　裳華房 (2020/09/30)