

ミ一散乱 (IV) - 散乱強度の数値計算 -

1. 散乱強度

『ミ一散乱 (II)』では、直線偏光の単色平面波（進行方向： z 方向、偏光方向： x 方向、振幅：1、波長： λ ）

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_x e^{ikz} = \mathbf{e}_x e^{ikr \cos \theta} \quad (1)$$

が、原点にある粒子（半径 a ）により散乱される場合の観測方向 (θ, φ) での散乱強度は

$$I(\theta, \varphi) = \cos^2 \varphi I_{\parallel}(\theta) + \sin^2 \varphi I_{\perp}(\theta) \quad (2)$$

$$I_{\parallel}(\theta) = \left(\frac{\lambda}{2\pi r} \right)^2 \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n \pi_n(\cos \theta) + b_n \tau_n(\cos \theta)) \right|^2 \quad (3)$$

$$I_{\perp}(\theta) = \left(\frac{\lambda}{2\pi r} \right)^2 \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n \tau_n(\cos \theta) + b_n \pi_n(\cos \theta)) \right|^2 \quad (4)$$

と与えられることを示した [1]。ここで

$$a_n = \frac{\psi_n(m\alpha)\psi'_n(\alpha) - m\psi_n(\alpha)\psi'_n(m\alpha)}{\psi_n(m\alpha)\xi'_n(\alpha) - m\xi_n(\alpha)\psi'_n(m\alpha)} \quad (5)$$

$$b_n = \frac{m\psi_n(m\alpha)\psi'_n(\alpha) - \psi_n(\alpha)\psi'_n(m\alpha)}{m\psi_n(m\alpha)\xi'_n(\alpha) - \xi_n(\alpha)\psi'_n(m\alpha)} \quad (6)$$

$$\alpha = ka = \frac{2\pi a}{\lambda} \quad (7)$$

$$m = \frac{k_p}{k} = \frac{n_p}{n} \quad (8)$$

$$\psi_n(\rho) = \rho j_n(\rho) \quad (9)$$

$$\xi_n(\rho) = \rho h_n^{(1)}(\rho) \quad (10)$$

$$\pi_n(\cos \theta) = \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \quad (11)$$

$$\tau_n(\cos \theta) = \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} \quad (12)$$

であり、式 (8) の m は相対屈折率、 n, n_p はそれぞれ媒質および粒子の屈折率である。

『ミ一散乱 (III)』では、粒子径 a が波長 λ に比べて十分に小さい ($a \ll \lambda$) 場合、すなわち、粒子パラメータ α が

$$\alpha = \frac{2\pi a}{\lambda} \ll 1 \quad (13)$$

を満たす場合の散乱強度は近似的に

$$\begin{aligned} I(\theta, \varphi) &= \frac{a^6}{r^2} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 \left(\frac{m^2 - 1}{m^2 + 1} \right)^2 (\cos^2 \varphi \cos^2 \theta + \sin^2 \varphi) \\ I_{\parallel}(\theta) &= \frac{a^6}{r^2} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 \left(\frac{m^2 - 1}{m^2 + 1} \right)^2 \cos^2 \theta \\ I_{\perp}(\theta) &= \frac{a^6}{r^2} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 \left(\frac{m^2 - 1}{m^2 + 1} \right)^2 \end{aligned} \quad (14)$$

となることを示した（レイリー散乱）[2]。

一般の α に対しては、式 (3)、(4) における a_n, b_n, π_n, τ_n を数値的に求めることが必要となる。この計算のための Python プログラムとして、BHMIE、PyMieScatt、miepython [3-5] などが提供されている。以下では、BHMIE プログラムを用いて求めた散乱強度の角度分布の結果について述べる。

2. 水滴の散乱強度の角度分布 [6]

空气中（屈折率 $n = 1$ ）で波長 $0.55 \mu\text{m}$ の単色光を水滴（半径： $0.26 \mu\text{m}$ ）に照射した場合の散乱強度の角度分布について考える。この波長の光に対する水の複素屈折率は $1.33 + i10^{-8}$ であり、粒子パラメータは $\alpha = 3$ に対応する。BHMIE により求めた a_n, b_n の最初の 5 つの値を表 1 に示す。この結果からは、最初の 3 項までが式 (3)、(4) の角度依存性を決めていることがわかる。

n	a_n	b_n
1	$7.3767 \times 10^{-1} - i4.3990 \times 10^{-1}$	$5.1631 \times 10^{-1} - i4.9973 \times 10^{-1}$
2	$4.0079 \times 10^{-1} - i4.9006 \times 10^{-1}$	$3.4192 \times 10^{-1} - i4.7435 \times 10^{-1}$
3	$9.3553 \times 10^{-3} - i9.6269 \times 10^{-2}$	$4.8467 \times 10^{-2} - i2.1475 \times 10^{-1}$
4	$6.8811 \times 10^{-5} - i8.2949 \times 10^{-3}$	$1.0346 \times 10^{-3} - i3.2148 \times 10^{-2}$
5	$2.8309 \times 10^{-7} - i5.3204 \times 10^{-4}$	$9.0375 \times 10^{-6} - i3.0062 \times 10^{-3}$

表 1 空气中での入射波長 $\lambda = 0.55 \mu\text{m}$ に対する水滴 ($\alpha = 3, m = 1.33 + i10^{-8}$) による散乱係数 a_n, b_n (注 1)

BHMIE による求めた散乱強度および偏光度の角度分布を図 1 および図 2 に示す。図 1 は散乱強度の角度分布を極座標表示で、図 2(a) は散乱強度の対数を直角座標で表したものである。また、図 2(b) は偏光度の角度分布を表す。図 1 および図 2(a) において、散乱強度は前方方向 ($\theta = 0$) にピークをもつことがわかる。 $\theta > 90^\circ$ に対しては、10 倍に拡大した破線において小さなこぶが見られる程度である。前方散乱の強度は、後方散乱の強度の 100 倍程度大きくなっている。

$\alpha \ll 1$ のレイリー散乱（式 (14)）においては、前方・後方の散乱強度は同じであったが、粒子径が大きくなる ($\alpha > 1$) にともなって前方への散乱強度が大きくなる。雲の中の水滴の代表的な半径は、 $10 \mu\text{m}$ 程度であり、 $0.26 \mu\text{m}$ に比べて非常に大きな値であるので、雲の中で光は前方方向に散乱されると考えられる。

このような前方散乱強度が大きくなる現象は日常的に経験することができる。夕方、夕日に向かって車を運転するとき、サンバイザーによって直射日光を遮っていたとしても眩しく感じる。これは、大気中やフロントガラス上の微粒子による前方散乱によるものである。この眩しさは、進行方向を逆にすると直ちに解消される。なぜなら、後方散乱 ($\theta = 180^\circ$) 強度はきわめて小さいからである。しかしながら、この解決策は実用的ではない。同様に、霧の中の夜の運転にも困難が伴う。対向車のヘッドライトによる霧の中の水滴による前方散乱によって眩しさを感じるからである。

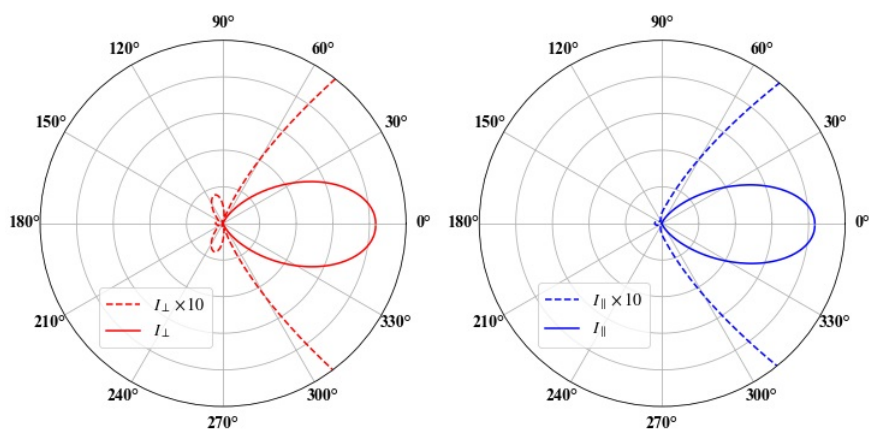


図 1 空气中での入射波長 $\lambda = 0.55 \mu\text{m}$ に対する水滴 ($\alpha = 3, m = 1.33 + i10^{-8}$) による散乱強度の角度分布（極座標表示）

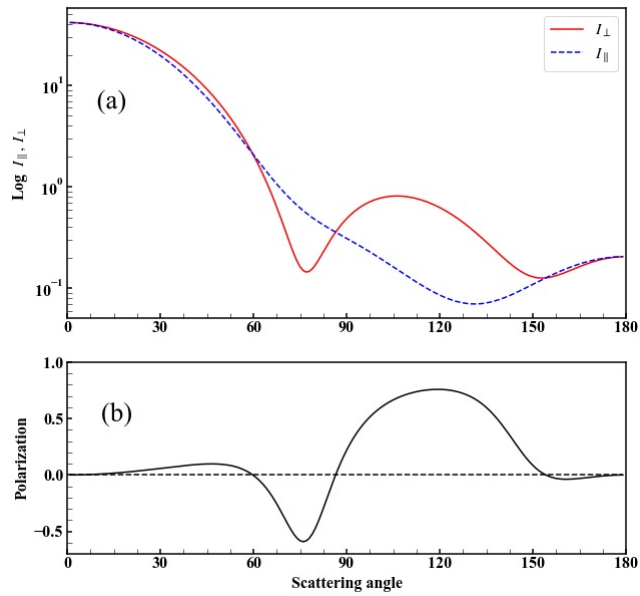


図2 空気中での入射波長 $\lambda = 0.55 \mu\text{m}$ に対する水滴 ($\alpha = 3, m = 1.33 + i10^{-8}$) による (a) 散乱強度 (対数表示)、(b) 偏光度の角度分布 (注2)

3. 水中の金粒子による散乱強度の角度分布

次の例として、真空中での波長 550 nm の単色平面波によって照射された水中の金粒子による散乱強度について考える。この波長における水の屈折率を $n = 1.33$ 、金の複素屈折率を $n_p = 0.57 + i2.45$ とし、金粒子の粒径による変化を調べる。金粒子の粒径が $2a = 100, 200, 1000 \text{ nm}$ ($\alpha = 0.76, 1.52, 7.60$) の場合の散乱強度の角度分布の BHMIE による計算結果を図 3-5 に示す (注3)。

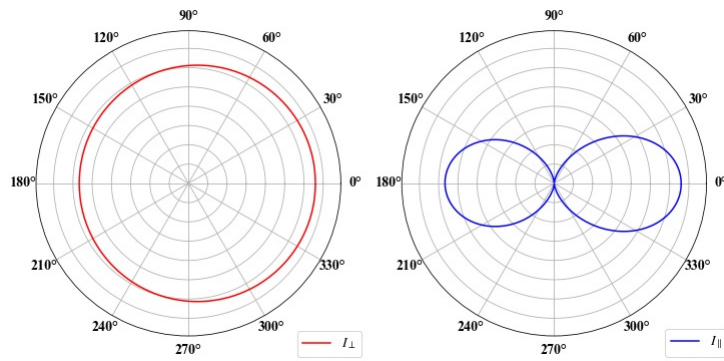


図3 水中に浮遊する粒径 100 nm ($\alpha = 0.76$) の金粒子による散乱強度の角度分布

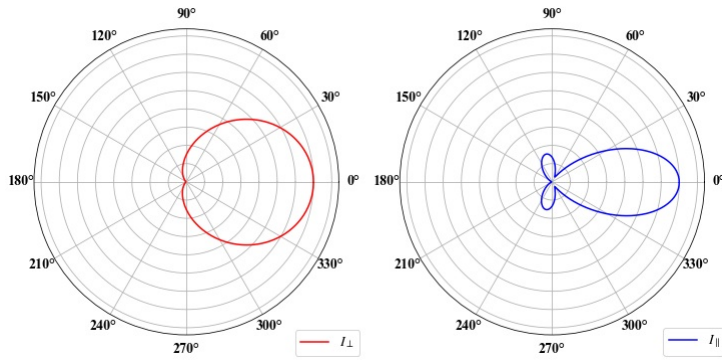


図4 水中に浮遊する粒径 200 nm ($\alpha = 1.52$) の金粒子による散乱強度の角度分布

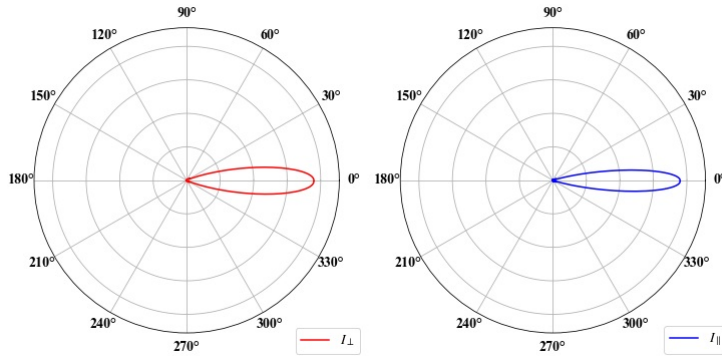


図5 水中に浮遊する粒径 1000 nm ($\alpha = 7.60$) の金粒子による散乱強度の角度分布

粒子パラメーター α が $\alpha < 1$ の場合 (図3) は、 I_{\parallel} は前方と後方にほぼ等しく分布し、 I_{\perp} はほぼ等方的になり、レイリー散乱の散乱強度の角度分布に近い。 $\alpha \sim 1.0$ の場合 (図4) は、 I_{\perp} 、 I_{\parallel} ともに前方への散乱強度が増加し、後方への散乱強度はかなり減少する。さらに $\alpha > 1$ の場合 (図5) は、前方散乱が後方散乱にくらべて極端に支配的になり、散乱強度は散乱角 $\pm 15^\circ$ 以下の領域に集中している。このように粒径の増加に伴って、前方散乱の強度が、後方散乱の強度に比べて著しく増加する。この現象はミー効果と呼ばれている。さらに粒径を大きくすると、光はほとんど前方 $\theta = 0^\circ$ に散乱される。

また、波長 550 nm の単色平面波によって照射された水中の金粒子からの散乱強度に対応する偏光度を図6に示す。図6より、粒径が 100 nm では近似的にレイリー散乱の偏光度になるが、粒径が増加するに従って偏光度は複雑に変化することがわかる。

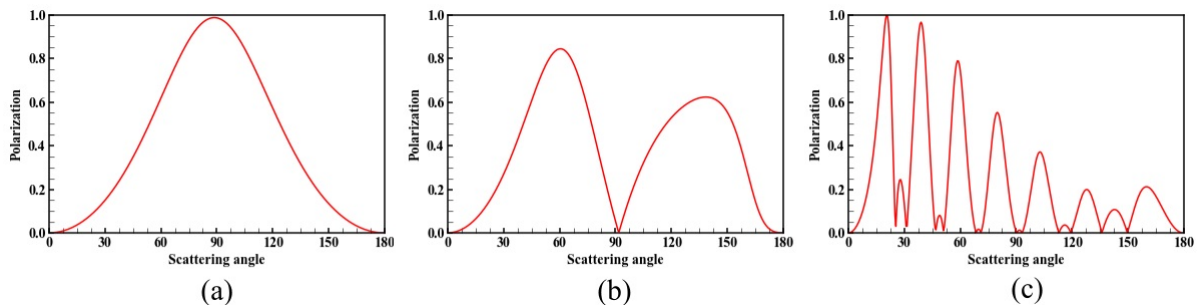


図6 水中に浮遊する金粒子による偏光度：粒径 (a)100 nm, (b)200 nm, (c)1000 nm

(注1) 本資料では、文献 [10] の定義を用いて散乱係数 a_n 、 b_n を定義しているため、文献 [8] などの散乱係数の定義と a_n 、 b_n が逆になっていることに注意が必要である。

(注 2) 文献 [8] の Fig 4.9(b) の図中の i_{\parallel} と i_{\perp} は逆であると思われる。

(注 3) 図 3-5 の粒径の値は粒子の直径として定義している。文献 [9] での粒径の定義とは異なっている可能性があり、粒径の値は一致していない。

参考文献

- 1) 『ミ-散乱 (II)』
(https://ieyasu03.web.fc2.com/EM/EM_11_Mie_2.html)
- 2) 『ミ-散乱 (III)』
(https://ieyasu03.web.fc2.com/EM/EM_11_Mie_3.html)
- 3) BHMIE
(<http://scatterlib.wdfiles.com/local--files/codes/bhmie.py>)
- 4) PyMieScatt
(<https://pymiescatt.readthedocs.io/en/latest/>)
- 5) miepython
(<https://miepython.readthedocs.io/en/latest/index.html>)
- 6) 『ミ-散乱における散乱強度の数値計算』
(https://ieyasu03.web.fc2.com/Computer/Mie/01-MieScattering_1.html)
- 7) 『ミ-散乱における散乱強度の数値計算 (2)』
(https://ieyasu03.web.fc2.com/Computer/Mie/02-MieScattering_2.html)
- 8) C. F. Bohren and D. R. Huffman : Absorption and Scattering of Light by Small Particles
p.114 Wiley-VCH (2012/04/27)
- 9) Optipedia 『ミ-散乱理論の展開』
(<https://optipedia.info/laser/handbook/laser-handbook-2nd-section/6-6/>)
- 10) 松山 達 : 『ミ-散乱理論の導出』 J. Soc. Powder Technol., Japan, **43**, 115-124(2006)
(https://www.jstage.jst.go.jp/article/sptj1978/43/2/43_2_115/_article/-char/ja/)