天球座標から局所球面座標への変換

天文分野で使われるファイルの代表的なフォーマット（形式）である FITS(The Flexible Image Transport System) ファイルのデータ配列を天体位置（赤経、赤緯）に変換する際に必要となる天球（赤道）座標系から局所球面座標系（native coordinate）への座標変換について説明する。

図 1 の赤道座標系 (α, δ) において天の北極 Q 方向を Z 軸とし、春分点 γ 方向を X 軸とする赤道直交座標系を XYZ 系とする。天球面上の任意の点 $P(\alpha_P, \delta_P)$ を新たな極とする球面座標系を局所球面座標系という。

1. 赤道座標系から局所球面座標系への変換

赤道座標系におけるある点 (α, δ) が点 P を極とする局所球面座標系でどのように表されるかを考える。

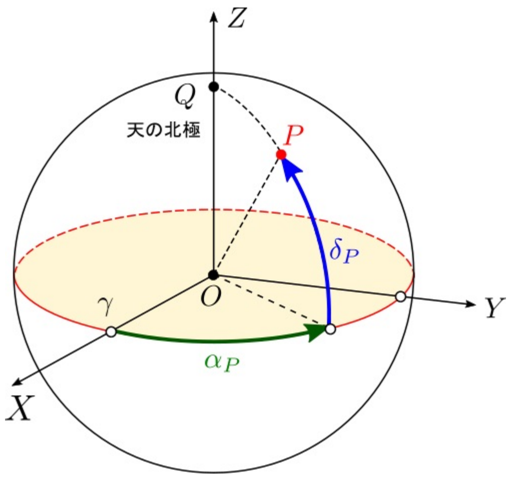

図 1　赤道座標系 (α, δ) と対応する赤道直交座標系 XYZ

そのために、まず XYZ 系を回転して、Z 軸を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ に一致させる回転変換を行う。

(i) Z 軸の周りに反時計回りに α_P だけ回転する。回転後の座標系を $X'Y'Z'$ とすると、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の $X'Y'$ 平面への射影は X' 軸に一致する。

(ii) 変換後の Y' 軸の周りに反時計回りに $\dfrac{\pi}{2} - \delta_P$ だけ回転する。回転後の座標系を $X''Y''Z''$ とすると Z'' 軸は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ に一致する。

赤道座標系における点 (α, δ) に対する単位ベクトル（方向余弦）は、XYZ 系において

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix} \tag{1}$$

と表される。また、z 軸および y 軸を中心とする反時計回りの角 θ の回転に対する変換行列は、それぞれ

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

と与えられる。したがって、(i), (ii) の回転変換後の $X''Y''Z''$ における対応する単位ベクトルは

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} &= R_{Y'}(\frac{\pi}{2}-\delta_P)R_Z(\alpha_P)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\delta_P\right) & 0 & -\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\delta_P\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\delta_P\right) & 0 & \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\delta_P\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha_P & \sin\alpha_P & 0 \\ -\sin\alpha_P & \cos\alpha_P & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin\delta_P & 0 & -\cos\delta_P \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\delta_P & 0 & \sin\delta_P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha_P & \sin\alpha_P & 0 \\ -\sin\alpha_P & \cos\alpha_P & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin\delta_P\cos\alpha_P & \sin\delta_P\sin\alpha_P & -\cos\delta_P \\ -\sin\alpha_P & \cos\alpha_P & 0 \\ \cos\delta_P\cos\alpha_P & \cos\delta_P\cos\alpha_P & \sin\delta_P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin\delta_P\cos\delta\left(\cos\alpha_P\cos\alpha+\sin\alpha_P\sin\alpha\right)-\cos\delta_P\sin\delta \\ \cos\delta\left(-\sin\alpha_P\cos\alpha+\cos\alpha_P\sin\alpha\right) \\ \cos\delta_P\cos\delta\left(\cos\alpha_P\cos\alpha+\cos\alpha_P\sin\alpha\right)+\sin\delta_P\sin\delta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin\delta_P\cos\delta\cos\left(\alpha-\alpha_P\right)-\cos\delta_P\sin\delta \\ \cos\delta\sin\left(\alpha-\alpha_P\right) \\ \cos\delta_P\cos\delta\cos\left(\alpha-\alpha_P\right)+\sin\delta_P\sin\delta \end{pmatrix} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

と表される。

ここで、Z'' 軸周りの回転の自由度が残されているので、天の北極の経度が新しい座標系では ϕ_P となるように X''' 軸を決める。天の北極 $Q(\alpha, \dfrac{\pi}{2})$ の $X''Y''Z''$ 系での座標は式 (2) より

$$
\begin{pmatrix} Q_{x''} \\ Q_{y''} \\ Q_{z''} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\delta_P \\ 0 \\ \sin\delta_P \end{pmatrix} \qquad (3)
$$

となる。$-\dfrac{\pi}{2} \leq \delta_P \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\delta_P \geq 0$ となり、$Q_{x''}$ は X'' 軸の負の側にあることがわかる（図 2)。

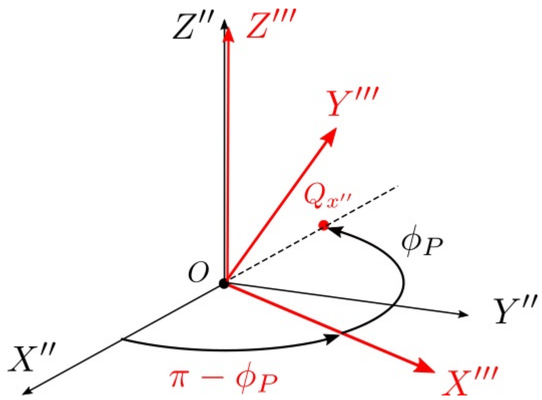

図 2　天の北極の変換後の座標系での経度

この点 $Q_{x''}$ の経度が ϕ_P となるためには

(iii) Z'' 軸の周りに反時計回りに $\pi-\phi_P$ だけ回転すればよい。回転後の座標系を $X'''Y'''Z'''$ とする。

(iii) の変換後、赤道座標系における点 (α, δ) が新しい局所球面座標系（対応する直交座標系が $X'''Y'''Z'''$）において (ϕ, θ) で表されるとすれば

$$
\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta \end{pmatrix} \qquad (4)
$$

として

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} &= R_{Z''}(\pi - \phi_P) \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\pi - \phi_P) & \sin(\pi - \phi_P) & 0 \\ -\sin(\pi - \phi_P) & \cos(\pi - \phi_P) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5}
$$

と求められる。ここで、公式としてまとめるために式 (5) に左から逆行列 $R_{Z''}^{-1}(\pi - \phi_P) = R_{Z''}(\phi_P - \pi)$ をかけて整理すれば

$$
\begin{aligned}
R_{Z''}(\phi_P - \pi) \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \cos(\phi_P - \pi) & \sin(\phi_P - \pi) & 0 \\ -\sin(\phi_P - \pi) & \cos(\phi_P - \pi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -\cos\phi_P & -\sin\phi_P & 0 \\ \sin\phi_P & -\cos\phi_P & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -\cos\theta(\cos\phi_P\cos\phi + \sin\phi_P\sin\phi) \\ \cos\theta(\sin\phi_P\cos\phi - \cos\phi_P\sin\phi) \\ \sin\theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -\cos\theta\cos(\phi - \phi_P) \\ -\cos\theta\sin(\phi - \phi_P) \\ \sin\theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{6}
$$

と表せる。式 (2) を式 (6) へ代入して、両辺を比較すれば

$$\cos\theta\cos(\phi - \phi_P) = \cos\delta_P\sin\delta - \sin\delta_P\cos\delta\cos(\alpha - \alpha_P) \tag{7}$$

$$\cos\theta\sin(\phi - \phi_P) = -\cos\delta\sin(\alpha - \alpha_P) \tag{8}$$

$$\sin\theta = \sin\delta_P\sin\delta + \cos\delta_P\cos\delta\cos(\alpha - \alpha_P) \tag{9}$$

を得る。式 (7)-(9) より

$$\phi = \arctan\left(\frac{-\cos\delta\sin(\alpha - \alpha_P)}{\cos\delta_P\sin\delta - \sin\delta_P\cos\delta\cos(\alpha - \alpha_P)}\right) + \phi_P \tag{10}$$

$$\theta = \arcsin\left(\sin\delta_P\sin\delta + \cos\delta_P\cos\delta\cos(\alpha - \alpha_P)\right) \tag{11}$$

となる。式 (10)、(11) が赤道座標系における点 $(\alpha,\, \delta)$ の点 $(\alpha_P,\, \delta_P)$ を極として、天の北極の経度が ϕ_P となるような局所球面座標系 $(\phi,\, \theta)$ への変換式である。

2. 局所球面座標系から赤道座標系への変換

次に、式 (7)-(11) の逆変換である局所球面座標系 $(\phi,\, \theta)$ から赤道座標系 $(\alpha,\, \delta)$ への変換を考える。まず式 (8) より

$$\cos\delta\sin(\alpha - \alpha_P) = -\cos\theta\sin(\phi - \phi_P)$$

$(7) \times \cos\delta_P + (9) \times \sin\delta_P$ より

$$\cos\delta_P\cos\theta\cos(\phi - \phi_P) + \sin\delta_P\sin\theta = \sin\delta$$

$(7) \times \sin\delta_P - (9) \times \cos\delta_P$ より

$$\sin\delta_P\cos\theta\cos(\phi - \phi_P) - \cos\delta_P\sin\theta = -\cos\delta\cos(\alpha - \alpha_P)$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\cos\delta\cos(\alpha-\alpha_P) &= \cos\delta_P\sin\theta-\sin\delta_P\cos\theta\cos(\phi-\phi_P) \qquad (12)\\
\cos\delta\sin(\alpha-\alpha_P) &= -\cos\theta\sin(\phi-\phi_P) \qquad (13)\\
\sin\delta &= \sin\delta_P\sin\theta+\cos\delta_P\cos\theta\cos(\phi-\phi_P) \qquad (14)
\end{aligned}
$$

を得る。式 (12)-(14) より

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \arctan\left(\frac{-\cos\theta\sin(\phi-\phi_P)}{\cos\delta_P\sin\theta-\sin\delta_P\cos\theta\cos(\phi-\phi_P)}\right)+\alpha_P \qquad (15)\\
\delta &= \arcsin\left(\sin\delta_P\sin\theta+\cos\delta_P\cos\theta\cos(\phi-\phi_P)\right) \qquad (16)
\end{aligned}
$$

となる。式 (15)、(16) が局所球面座標系 (ϕ, θ) から赤道座標系 (α, δ) 変換式である。

参考文献

[1] FIITS の手引き 第 7.0 版 (2019/02/12)
(URL:http://ww1.fukuoka-edu.ac.jp/~kanamitu/fits/jdoc/fits_t70a.pdf)