境界温度がステップ関数的に変化する場合に温度分布の計算（非同次偏微分方程式の解法）

2017 年 9 月 5 日

概要

一様な発熱をともなった 1 次元熱伝導方程式を例として、非同次境界条件のもとでの 2 階の非同次偏微分方程式に対する固有関数展開法による解法について述べる。これをもとに初期温度が一様で、境界温度がステップ関数的に変化する場合に対する温度分布を位置および時間の関数としてを与える解析式を導出した。

目次

1　熱伝導方程式

1.1　1 次元熱伝導方程式

発熱を伴う 1 次元系における温度分布 $T(x,t)$ は、1 次元熱伝導方程式

$$\rho(x)c(x)\frac{\partial}{\partial t}T(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial}{\partial x}T(x,t)\right] + Q(x,t) \tag{1.1}$$

によって記述される。ここで、$k(x), c(x), \rho(x), Q(x,t)$ はそれぞれ位置 x における熱伝導率 [W/(m ℃)]、比熱 [J/(kg ℃)]、密度 [kg/m^3]、発熱量密度 [W/m^3] である。長さ L の空間的に一様な 1 次元ロッドでの温度分布 $T(x,t)$ を考える場合、$k(x), c(x), \rho(x), Q(x,t)$ は位置によらず一定とみなしてよく (1.1) は

$$\frac{\partial}{\partial t}T(x,t) = \kappa^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t) + \frac{Q(t)}{c\rho} \tag{1.2}$$

と簡単化できる。ここで、

$$\kappa^2 \equiv \frac{k}{c\rho} \tag{1.3}$$

で定義される温度伝導率（熱拡散率）[m^2/s] である。(1.2) は $Q(x,t)/c\rho$ を非同次項とする 2 階の非同次偏微分方程式となっている。

1.2　初期条件・境界条件・発熱条件

本報告書では、$t=0$ での初期温度分布を $f(x)$、$x=0$ は断熱、$x=L$ では温度が $g(t)$ で時間変化、$t \geq 0$ で系全体が均一に Q_0 発熱する場合を考える。したがって、初期条件

$$T(x,0) = f(x) \tag{1.4}$$

境界条件

$$T(L,t) = g(t) \qquad : \quad x=L \text{ で境界温度が時間変化（非同次境界条件）} \tag{1.5}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}T(x,t)\right|_{x=0} = 0 \qquad : \quad x=0 \text{ で断熱（同次境界条件）} \tag{1.6}$$

発熱条件

$$Q(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ Q_0 & (t \geq 0) \end{cases} \tag{1.7}$$

のもとで (1.2) の非同次の偏微分方程式を解くことで温度分布 $T(x,t)$ が求まることになる。

2　非同次偏微分方程式の解法

上述の 1 次元熱伝導方程式を例として、2 階の非同次偏微分方程式 (1.2) を非同次境界条件 (1.5) のもとで解くことを考える。

2.1　同次境界条件への変換

まず、非同次境界条件 (1.5) が同次境界条件となるように、以下の変数変換を行う。

$$T(x,t) = u(x,t) + S(x,t) \tag{2.1}$$

ここで、$S(x,t)$ は $u(x,t)$ に対する境界条件が同次となるように選ぶ。いろいろな型を試した結果

$$S(x,t) = g(t) + \frac{Q_0}{2\kappa^2 c\rho}(L^2 - x^2) \tag{2.2}$$

を得た。この場合、(2.2) より

$$S(x,0)=g(0)+\frac{Q_0}{2\kappa^2 c\rho}(L^2-x^2) \tag{2.3}$$

$$S(L,t)=g(t) \tag{2.4}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}S(x,t)\right|_{x=0}=0 \tag{2.5}$$

となる。(2.2) を (2.1) へ代入すれば、以下の変数変換の具体表式が得られる。

$$T(x,t)=u(x,t)+g(t)+\frac{Q_0}{2\kappa^2 c\rho}(L^2-x^2) \tag{2.6}$$

次に、(2.6) より変換後の $u(x,t)$ に対する方程式を求める。(2.6) を (1.2) へ代入して

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)+\frac{\partial}{\partial t}g(t)=\kappa^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)-\frac{Q_0}{\kappa^2 c\rho}\right)+\frac{Q_0}{c\rho}$$

$$\therefore\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)=\kappa^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)-\frac{\partial}{\partial t}g(t) \tag{2.7}$$

が求まる。ここで、$\partial g(t)/\partial t$ は t のみの関数であるが x を含む型で一般化して考えることにする。すなわち、

$$G(x,t)\equiv-\frac{\partial}{\partial t}g(t) \tag{2.8}$$

とすれば、(2.7) より $u(x,t)$ に対する偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)=\kappa^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)+G(x,t) \tag{2.9}$$

を得る。次に、(1.4)、(2.3) からは初期条件として、

$$u(x,0)+g(0)+\frac{Q_0}{2\kappa^2 c\rho}(L^2-x^2)=f(x)$$

$$\therefore u(x,0)=\phi(x) \tag{2.10}$$

が求まる。ここで、

$$\phi(x)\equiv f(x)-\left[g(0)+\frac{Q_0}{2\kappa^2 c\rho}(L^2-x^2)\right] \tag{2.11}$$

と置いた。更に、境界条件は (1.5)、(2.4) からは、

$$u(L,t)+g(t)=g(t)$$

$$\therefore u(L,t)=0 \tag{2.12}$$

(1.6)、(2.5) から

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right|_{x=0}=0 \tag{2.13}$$

となり、同次境界条件となっていることが分かる。

以上の結果をまとめると、(2.6) の変換後の $u(x,t)$ に対する方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)=\kappa^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)+G(x,t) \tag{2.14}$$

$$\begin{cases} u(x,0)=\phi(x) & \text{：初期条件} \\ u(L,t)=0 & \text{：同次境界条件} \\ \left.\dfrac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right|_{x=0}=0 & \text{：同次境界条件} \end{cases} \tag{2.15}$$

となり、初期条件の下で同次境界条件に対する非同次項 $G(x,t)$ を含む非同次偏微分方程式 (2.14) を解く問題に帰着された。

2.2　固有関数展開法

ここでは、以下の 3 ステップからなる”固有関数展開法”[1] を適用して非同次方程式 (2.14) の解を求める。まず、(2.14) において $G(x,t)=0$ とおいた同次方程式の解を変数分離により求める。次に、その解を固有関数として非同次項を展開する。最後に定数変化法により展開係数を求めることにより非同次方程式の解を求める。

2.2.1　同次方程式の解

(2.14) において $G(x,t)=0$ とすれば、同次方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t)=\kappa^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) \\ u(L,t)=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x}u(x,t)\bigg|_{x=0}=0 \end{cases} \tag{2.16}$$

を得る。（初期条件は、展開係数を決めるときに用いる）ここで、(2.16) の解を

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)X_n(x) \tag{2.17}$$

とおいて、変数分離により $X_n(x)$ を求めると

$$X_n(x)=\cos\left(\frac{2n+1}{2L}\pi x\right)=\cos(\lambda_n x) \tag{2.18}$$

となる。（付録 A 参照）ここで、

$$\lambda_n=\frac{2n+1}{2L}\pi \qquad (n=0,1,2,\ldots) \tag{2.19}$$

である。この $X_n(x)$ が (2.16) の固有関数に相当する。

2.2.2　非同次項の展開

次に、非同次項 $G(x,t)$ を (2.18) の固有関数 $X_n(x)$ で展開すると

$$\begin{aligned} G(x,t)&=\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n(t)X_n(x) \\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n(t)\cos(\lambda_n x) \end{aligned} \tag{2.20}$$

を得る。両辺に $\cos(\lambda_m x)$ をかけて 0 から L まで x で積分すれば、

$$\begin{aligned} \int_0^L G(x,t)\cos(\lambda_n x)\,dx&=\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n(t)\underbrace{\int_0^L\cos(\lambda_n x)\cos(\lambda_m x)\,dx}_{\text{直交性より }\frac{L}{2}\delta_{nm}\text{（付録 B 参照）}} \\ &=\frac{L}{2}\xi_m(t) \end{aligned}$$

$$\therefore \xi_n(t)=\frac{2}{L}\int_0^L G(x,t)\cos(\lambda_n x)\,dx \tag{2.21}$$

となり、$G(x,t)$ の展開係数が (2.21) で与えられる。

2.2.3　定数変化法の適用

(2.17)、(2.18) より

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\cos(\lambda_n x) \tag{2.22}$$

とおいて、$T_n(t)$ をパラメータとみなして (2.14)、(2.15) へ代入する。(2.14) より

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} T_n'(t)\cos(\lambda_n x) &= -\kappa^2 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 T_n(t)\cos(\lambda_n x) + \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(t)\cos(\lambda_n x) \\
\sum_{n=0}^{\infty} \left[T_n'(t) + \kappa^2\lambda^2 T_n(t) - \xi_n(t)\right]\cos(\lambda_n x) &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\therefore T_n'(t) + \kappa^2\lambda^2 T_n(t) - \xi_n(t) = 0 \tag{2.23}
$$

(2.15) の初期条件より

$$
\sum_{n=0}^{\infty} T_n(0)\cos(\lambda_n x) = \phi(x) \tag{2.24}
$$

(2.15) の境界条件からは

$$
\sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos(\lambda_n L) = 0 \tag{2.25}
$$

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(t) T_n(t)\sin(\lambda_n \cdot 0) = 0 \tag{2.26}
$$

を得る。(2.25)、(2.26) は常に成立しているので、$T_n(t)$ に対して何の条件も与えない。

ここで、(2.23)、(2.24) より $T_n(t)$ を求めることを考える。(2.23) は非同次方程式

$$
T_n'(t) + \kappa^2\lambda_n^2 T_n(t) = \xi_n(t) \tag{2.27}
$$

であるので、まず、(2.27) において右辺 $= 0$ とした同次方程式を変数分離で解く。

$$
\begin{aligned}
&T_n'(t) + \kappa^2\lambda^2 T_n(t) = 0 \\
&\frac{T_n'(t)}{T_n(t)} = -\kappa^2\lambda_n^2 \\
&\ln T_n(t) = -\kappa^2\lambda_n^2 t + C_n
\end{aligned}
$$

$$
\therefore T_n(t) = C_n e^{-\kappa^2\lambda_n^2 t} \tag{2.28}
$$

ここで、$C_n = C_n(t)$ とみなして、(2.27) へ代入すれば

$$
\begin{aligned}
C_n'(t)e^{-\kappa^2\lambda_n^2 t} - \kappa^2\lambda_n^2 C_n(t)e^{-\kappa^2\lambda_n^2 t} + \kappa^2\lambda_n^2 C_n(t)e^{-\kappa^2\lambda_n^2 t} &= \xi_n(t) \\
C_n'(t) &= \xi_n(t)e^{\kappa^2\lambda_n^2 t}
\end{aligned}
$$

両辺を t で積分すれば、

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \frac{dC_n}{d\tau}d\tau &= \int_0^t \xi_n(\tau)e^{\kappa^2\lambda_n^2\tau}d\tau \\
C_n(t) - C_n(0) &= \int_0^t \xi_n(\tau)e^{\kappa^2\lambda_n^2\tau}d\tau \\
\therefore C_n(t) &= C_n(0) + \int_0^t \xi_n(\tau)e^{\kappa^2\lambda_n^2\tau}d\tau
\end{aligned}
$$

したがって、(2.28) より

$$
T_n(t) = C_n(0)e^{-\kappa^2\lambda_n^2 t} + \int_0^t \xi_n(\tau)e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-\tau)}d\tau \tag{2.29}
$$

ここで、$t = 0$ とすれば

$$
T_n(0) = C_n(0) \tag{2.30}
$$

一方、初期条件 (2.24) の両辺に $\cos(\lambda_m x)$ をかけて、0 から L まで x で積分すれば、

$$
\sum_{n=0}^{\infty} T_n(0)\underbrace{\int_0^L \cos(\lambda_n x)\cos(\lambda_m x)\,dx}_{\frac{L}{2}\delta_{nm}} = \int_0^L \phi(x)\cos(\lambda_m x)\,dx
$$

$$T_m(0) = \frac{2}{L}\int_0^L \phi(x)\cos(\lambda_m x)\,dx \tag{2.31}$$

(2.30)、(2.31) を比較して、

$$C_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L \phi(x)\cos(\lambda_n x)\,dx \tag{2.32}$$

を得る。したがって、(2.32) を (2.29) へ代入して

$$T_n(t) = \frac{2}{L}\left[\int_0^L \phi(\xi)\cos(\lambda_n \xi)\,d\xi\right] e^{-\kappa^2\lambda_n^2 t} + \int_0^t \xi_n(\tau) e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-\tau)} d\tau \tag{2.33}$$

となる。この結果を (2.22) へ代入すれば

$$u(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^L \phi(\xi)\cos(\lambda_n \xi)\,d\xi\right] e^{-\kappa^2\lambda_n^2 t}\cos(\lambda_n x) + \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^t \xi_n(\tau) e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-\tau)} d\tau\right]\cos(\lambda_n x) \tag{2.34}$$

を得る。(2.34) が固有関数展開法による非同次偏微分方程式 (2.14) の解である。(2.34) を (2.6) へ代入すれば、熱伝導方程式 (1.2) に対する解が得られることになる。

2.3 熱伝導方程式の一般解

ここでは、今回の問題に対する (2.34) の第 1 項、第 2 項の具体的な表式を明らかにし、熱伝導方程式 (1.2) の一般解を求める。第 1 項に関しては (2.11) より、

$$\begin{aligned}
\int_0^L \phi(\xi)\cos(\lambda_n \xi)\,d\xi &= \int_0^L \left[f(\xi) - g(0) - \frac{Q_0}{2\kappa^2 c\rho}(L^2 - \xi^2)\right]\cos(\lambda_n \xi)\,d\xi \\
&= \int_0^L [f(\xi) - g(0)]\cos(\lambda_n \xi)\,d\xi - \frac{Q_0}{2\kappa^2 c\rho}\underbrace{\int_0^L (L^2 - \xi^2)\cos(\lambda_n \xi)\,d\xi}_{2\frac{(-1)^n}{\lambda_n^3}\ \text{（付録 C 参照）}} \\
&= \int_0^L [f(\xi) - g(0)]\cos(\lambda_n \xi)\,d\xi - \frac{Q_0}{\kappa^2 c\rho}\frac{(-1)^n}{\lambda_n^3}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

第 2 項に関しては、(2.8) より本来 $G(x,t)$ は時間のみの関数であったので、(2.21) において $G(x,\tau) = G(\tau)$ と考えることができる。したがって、

$$\begin{aligned}
\xi_n(\tau) &= \frac{2}{L}\int_0^L G(x,\tau)\cos(\lambda_n x)\,dx \\
&= \frac{2}{L}G(\tau)\int_0^L \cos(\lambda_n x)\,dx \\
&= \frac{2}{L}G(\tau)\left[\frac{1}{\lambda_n}\sin(\lambda_n x)\right]_0^L \\
&= \frac{2}{L}\frac{G(\tau)}{\lambda_n}\sin(\lambda_n L) \\
&= \frac{2}{L}\frac{G(\tau)}{\lambda_n}\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) \\
&= \frac{2}{L}\frac{(-1)^n}{\lambda_n}G(\tau) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)
\end{aligned} \tag{2.36}$$

となる。このことから第 2 項の [ ] 内は

$$\begin{aligned}
\int_0^t \xi_n(\tau) e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-\tau)} d\tau &= \frac{2}{L}\frac{(-1)^n}{\lambda_n}\int_0^t G(\tau) e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-\tau)} d\tau \\
&= -\frac{2}{L}\frac{(-1)^n}{\lambda_n}\int_0^t \frac{\partial g(\tau)}{\partial \tau} e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-\tau)} d\tau \\
&= -\frac{2}{L}\frac{(-1)^n}{\lambda_n}\left\{\left[g(\tau) e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-\tau)}\right]_0^t - \kappa^2\lambda_n^2\int_0^t g(\tau) e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-\tau)} d\tau\right\} \\
&= -\frac{2}{L}\frac{(-1)^n}{\lambda_n}\left[g(t) - g(0) e^{-\kappa^2\lambda_n^2 t} - \kappa^2\lambda_n^2\int_0^t g(\tau) e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-\tau)} d\tau\right]
\end{aligned} \tag{2.37}$$

ここで、(2.8) を用いて τ についての部分積分を行った。

以上の (2.34)、(2.35)、(2.37) を (2.6) へ代入すれば

$$\begin{aligned} T(x,t) &= g(t) + \frac{Q_0}{2\kappa^2 c\rho}(L^2 - x^2) + \frac{2}{L}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^L (f(\xi) - g(0))\cos(\lambda_n \xi_n)\, d\xi\right] e^{-\kappa^2\lambda_n^2 t}\cos(\lambda_n x) \\ &- \frac{2}{L}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda_n^3}\left[\frac{Q_0}{\kappa^2 c\rho}e^{-\kappa^2\lambda_n^2 t} + \lambda_n^2\left\{g(t) - g(0)e^{-\kappa^2\lambda_n^2 t} - \kappa^2\lambda_n^2\int_0^t g(\tau)e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-\tau)}d\tau\right\}\right]\cos(\lambda_n x) \end{aligned} \tag{2.38}$$

を得る。(2.38) が (1.4)-(1.7) の条件下での非同次方程式 (1.2) の一般解である。

特に、初期温度分布が一様で $t = 0$ での $x = L$ の温度に等しい場合は、

$$f(x) = g(0) \tag{2.39}$$

となるので、(2.38) の右辺第 3 項 $= 0$ となり、

$$T(x,t) = g(t) + \frac{Q_0}{2\kappa^2 c\rho}(L^2 - x^2) - \frac{2}{L}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda_n^3}\left[\frac{Q_0}{\kappa^2 c\rho}e^{-\kappa^2\lambda_n^2 t} + \lambda_n^2\left\{g(t) - g(0)e^{-\kappa^2\lambda_n^2 t} - K_n(t)\right\}\right]\cos(\lambda_n x) \tag{2.40}$$

と表される。ここで、

$$K_n(t) \equiv \kappa^2\lambda_n^2\int_0^t g(\tau)e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-\tau)}d\tau \tag{2.41}$$

である。

3　ステップ関数的温度変化に対する解

本節では、(2.40) において $x = L$ での温度変化がステップ関数的に以下のように与えられる場合について考える。

$$g(t) = T_i \qquad (t_{i-1} < t \leq t_i,\ t_0 = 0\ ;\ i = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3.1}$$

$t_{i-1} < t \leq t_i$ に対して、$K_n(t)$ は

$$\begin{aligned} K_n(t) &= \kappa^2\lambda_n^2\left[\sum_{j=1}^{i-1} T_j\int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-\tau)}d\tau + T_j\int_{t_{i-1}}^{t} e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-\tau)}d\tau\right] \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} T_j\left[e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-\tau)}\right]_{t_{j-1}}^{t_j} + T_i\left[e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-\tau)}\right]_{t_{i-1}}^{t} \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} T_j\left(e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-t_j)} - e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-t_{j-1})}\right) + T_i\left(1 - e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-t_{i-1})}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} T_j e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-t_j)} - \underbrace{\sum_{j=1}^{i-1} T_j e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-t_{j-1})}}_{j-1\longrightarrow k} + T_i\left(1 - e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-t_{i-1})}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} T_j e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-t_j)} - \sum_{k=0}^{i-2} T_{k+1} e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-t_k)} + T_i\left(1 - e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-t_{i-1})}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{i-2} T_j e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-t_j)} + T_{i-1}e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-t_{i-1})} - \sum_{k=1}^{i-2} T_{k+1} e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-t_k)} - T_1 e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-t_0)} + T_i\left(1 - e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-t_{i-1})}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{i-2} (T_j - T_{j+1}) e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-t_j)} + (T_{i-1} - T_i)e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-t_{i-1})} - T_1 e^{-\kappa^2\lambda_n^2 t} + T_i \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} (T_j - T_{j+1}) e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-t_j)} - T_1 e^{-\kappa^2\lambda_n^2 t} + T_i \end{aligned} \tag{3.2}$$

となる。ここで、$t_0 = 0$ の関係を用いた。したがって、

$$
\begin{aligned}
g(t) - g(0)e^{-\kappa^2\lambda_n^2 t} - K_n(t) &= T_i - T_1 e^{-\kappa^2\lambda_n^2 t} - \sum_{j=1}^{i-1}(T_j - T_{j+1})e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-t_j)} + T_1 e^{-\kappa^2\lambda_n^2 t} - T_i \\
&= -\sum_{j=1}^{i-1}(T_j - T_{j+1})e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-t_j)} \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

となる。(3.3) を (2.40) へ代入して、

$$
\begin{aligned}
T(x,t) &= g(t) + \frac{Q_0}{2\kappa^2 c\rho}(L^2 - x^2) - \frac{2}{L}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda_n^3}\left[\frac{Q_0}{\kappa^2 c\rho}e^{-\kappa^2\lambda_n^2 t} + \lambda_n^2\sum_{j=1}^{i-1}(T_j - T_{j+1})e^{-\kappa^2\lambda_n^2(t-t_j)}\right]\cos(\lambda_n x) \qquad (3.4) \\
&= g(t) + \frac{Q_0}{2\kappa^2 c\rho}(L^2 - x^2) - \frac{2}{L}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda_n^3}\left[\frac{Q_0}{\kappa^2 c\rho} + \lambda_n^2\sum_{j=1}^{i-1}(T_j - T_{j+1})e^{\kappa^2\lambda_n^2 t_j}\right]e^{-\kappa^2\lambda_n^2 t}\cos(\lambda_n x) \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

を得る。(3.3)、(3.4) がステップ関数的温度変化に対する解となっている。以下では、具体的なステップ関数変化に対する 2, 3 の例をあげる。

3.1　1 ステップの場合

$x = L$ での温度の時間変化が

$$g(t) = T_1 = \text{一定} \qquad (0 \leq t < t_1 \longrightarrow \infty) \qquad (3.6)$$

で与えられる場合は、(3.5) において $i = 1$ の場合に相当するので j についての和 $= 0$ となり、

$$T(x,t) = T_1 + \frac{Q_0}{2\kappa^2 c\rho}(L^2 - x^2) - \frac{2}{L}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda_n^3}\left(\frac{Q_0}{\kappa^2 c\rho}\right)e^{-\kappa^2\lambda_n^2 t}\cos(\lambda_n x) \qquad (3.7)$$

と表される。ここで、定常状態に対しては、$t \to \infty$ とすれば $e^{-\kappa^2\lambda_n^2 t} \to 0$ となることから

$$T(x,\infty) = T_1 + \frac{Q_0}{2\kappa^2 c\rho}(L^2 - x^2) \qquad (3.8)$$

となる。(3.8) は定常状態での解（付録 D 参照）に一致する。また、

$$\frac{1}{2}(L^2 - x^2) = \frac{2}{L}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda_n^3}\cos(\lambda_n x) \qquad (3.9)$$

の関係（付録 E 参照）を用いれば、(3.7) は

$$T(x,t) = T_0 + \frac{2Q_0}{\kappa^2 c\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda_n^3}\left(1 - e^{-\kappa^2\lambda_n^2 t}\right)\cos(\lambda_n x) \qquad (3.10)$$

と表される。ここで、特に、$x = 0$ とすれば、

$$T(0,t) = T_0 + \frac{2Q_0}{\kappa^2 c\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda_n^3}\left(1 - e^{-\kappa^2\lambda_n^2 t}\right) \qquad (3.11)$$

となるり、$x = 0$ における温度の時間変化が指数関数の和で表されることが分かる。

3.2　2 ステップの場合

$x = L$ での温度の時間変化が 2 段階の

$$g(t) = \begin{cases} T_1 & (0 \leq t \leq t_1) \\ T_2 & (t_1 < t \leq t_2 \longrightarrow \infty) \end{cases} \qquad (3.12)$$

で与えられる場合には、(3.5) より

(i) $0 \le t \le t_1$ ： (3.7) と同様に

$$T(x,t) = T_1 + \frac{Q_0}{2\kappa^2 c\rho}(L^2 - x^2) - \frac{2}{L}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda_n^3}\left(\frac{Q_0}{\kappa^2 c\rho}\right)e^{-\kappa^2\lambda_n^2 t}\cos(\lambda_n x) \tag{3.13}$$

(ii) $t > t_1$ ：

$$T(x,t) = T_2 + \frac{Q_0}{2\kappa^2 c\rho}(L^2 - x^2) - \frac{2}{L}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda_n^3}\left[\frac{Q_0}{\kappa^2 c\rho} - \lambda_n^2(T_1 - T_2)e^{-\kappa^2\lambda_n^2 t_1}\right]e^{-\kappa^2\lambda_n^2 t}\cos(\lambda_n x) \tag{3.14}$$

となる。

3.3　3 ステップの場合

$x = L$ での温度の時間変化が 3 段階の

$$g(t) = \begin{cases} T_1 & (0 \le t \le t_1) \\ T_2 & (t_1 < t \le t_2) \\ T_3 & (t_2 < t \le t_3 \longrightarrow \infty) \end{cases} \tag{3.15}$$

で与えられる場合には、(3.5) より同様に

(i) $0 \le t \le t_1$ ：

$$T(x,t) = T_1 + \frac{Q_0}{2\kappa^2 c\rho}(L^2 - x^2) - \frac{2}{L}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda_n^3}\left(\frac{Q_0}{\kappa^2 c\rho}\right)e^{-\kappa^2\lambda_n^2 t}\cos(\lambda_n x) \tag{3.16}$$

(ii) $t_1 < t \le t_2$ ：

$$T(x,t) = T_2 + \frac{Q_0}{2\kappa^2 c\rho}(L^2 - x^2) - \frac{2}{L}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda_n^3}\left[\frac{Q_0}{\kappa^2 c\rho} - \lambda_n^2(T_1 - T_2)e^{-\kappa^2\lambda_n^2 t_1}\right]e^{-\kappa^2\lambda_n^2 t}\cos(\lambda_n x) \tag{3.17}$$

(iii) $t > t_2$ ：

$$T(x,t) = T_3 + \frac{Q_0}{2\kappa^2 c\rho}(L^2 - x^2) - \frac{2}{L}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda_n^3}\left[\frac{Q_0}{\kappa^2 c\rho} - \lambda_n^2\left\{(T_1 - T_2)e^{-\kappa^2\lambda_n^2 t_1} + (T_2 - T_3)e^{-\kappa^2\lambda_n^2 t_2}\right\}\right]e^{-\kappa^2\lambda_n^2 t}\cos(\lambda_n x) \tag{3.18}$$

となる。

付録 A　変数分離

同次方程式に対する変数分離による解法について述べる。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \kappa^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) & : \quad \text{同次方程式} \\ u(L,t) = 0 & \longrightarrow X(L)T(t) = 0 \ \ \therefore X(L) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t)\Big|_{x=0} = 0 & \longrightarrow X'(0)T(t) = 0 \ \ \therefore X'(0) = 0 \end{cases} \tag{A-1}$$

(A-1) の解を変数分離により求める。

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{A-2}$$

とおいて、(A-1) へ代入すれば、

$$\begin{aligned} X(x)T'(t) &= \kappa^2 X''(x)T(t) \\ \frac{X''(x)}{X(x)} &= \frac{T'(t)}{\kappa^2 T(t)} = \alpha \text{（定数）} \end{aligned} \tag{A-3}$$

$X(x)$ に関しては、(A-3) より

$$X''(x) - \alpha X(x) = 0 \tag{A-4}$$

を得る。以下では、α の正負で場合分けして考える。

(i) $\alpha = \lambda^2$ $(\lambda > 0)$ の場合

$$X(x)'' - \lambda^2 X(x) = 0$$

となるので

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x} \\ X'(x) &= \lambda(C_1 e^{\lambda x} - C_2 e^{-\lambda x}) \end{aligned}$$

境界条件より、

$$\begin{aligned} &0 = C_1 e^{\lambda L} + C_2 e^{-\lambda L} \\ &0 = \lambda(C_1 - C_2) \\ &\therefore C_1 = C_2 = 0 \end{aligned}$$

となり、$X(x) = 0$ となるため解として不適である。

(ii) $\alpha = -\lambda^2$ $(\lambda > 0)$ の場合

$$X(x)'' + \lambda^2 X(x) = 0$$

となるので

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x \\ X'(x) &= \lambda(-C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x) \end{aligned}$$

境界条件より、

$$\begin{aligned} &0 = C_1 \cos \lambda L + C_2 \sin \lambda L \\ &0 = \lambda C_2 \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} &C_2 = 0 \\ &C_1 \cos \lambda L = 0 \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \cos\lambda L &= 0 \\ \lambda L &= (2n+1)\frac{\pi}{2} \\ \therefore \lambda &= \frac{(2n+1)\pi}{2L} \end{aligned} \tag{A-5}$$

したがって、

$$X(x) = C_1 \cos\left(\frac{2n+1}{2L}\pi x\right) \tag{A-6}$$

同様に、$T(t)$ に関しては、$\alpha = \lambda^2$ とおいて (A-3) より

$$\begin{aligned} \frac{T'(t)}{T(t)} &= -\lambda^2\kappa^2 X''(x) \\ \ln T(t) &= -\lambda^2\kappa^2 t + C_3 \\ T(t) &= C_3 e^{-\lambda^2\kappa^2 t} \\ &= C_3 \exp\left[-\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}\right)^2 \kappa^2 t\right] \end{aligned} \tag{A-7}$$

を得る。

(A-1)(A-6)(A-7) より重ね合わせの原理を用いて、

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp\left[-\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}\right)^2 \kappa^2 t\right] \cos\left(\frac{2n+1}{2L}\pi x\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2\kappa^2 t} \cos(\lambda_n x) \end{aligned} \tag{A-8}$$

となる。ここで、

$$\lambda_n = \frac{2n+1}{2L}\pi \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{A-9}$$

である。

付録 B　直交性

$$\int_0^L \cos(\lambda_n x)\cos(\lambda_m x)\, d\xi = \frac{L}{2}\delta_{nm} \qquad \left(\lambda_n = \frac{2n+1}{2L}\pi,\ n = 0, 1, 2, \ldots\right) \tag{B-1}$$

[証明]
加法定理

$$\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B) \tag{B-2}$$
$$\cos(A-B) = \cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B) \tag{B-3}$$

より

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right] \tag{B-4}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \cos(\lambda_n x)\cos(\lambda_m x) &= \frac{1}{2}\left[\cos(\lambda_n + \lambda_m)x + \cos(\lambda_n - \lambda_m)x\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{n+m+1}{L}\pi x\right) + \cos\left(\frac{n-m}{L}\pi x\right)\right] \end{aligned} \tag{B-5}$$

(i) $n \neq m$ の場合

$$
\begin{aligned}
\int_0^L \cos(\lambda_n \xi)\cos(\lambda_m x)\,d\xi &= \frac{1}{2}\int_0^L \left[\cos\left(\frac{n+m+1}{L}\pi x\right) + \cos\left(\frac{n-m}{L}\pi x\right)\right] dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{L}{(n+m+1)\pi}\sin\left(\frac{n+m+1}{L}\pi x\right) + \frac{L}{(n-m)\pi}\sin\left(\frac{n-m}{L}\pi x\right)\right]_0^L \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{L}{(n+m+1)\pi}\sin\left((n+m+1)\pi\right) + \frac{L}{(n-m)\pi}\sin\left((n-m)\pi\right)\right] \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B-6}
$$

(ii) $n = m$ の場合

$$
\begin{aligned}
\int_0^L \cos^2(\lambda_n \xi)\,d\xi &= \frac{1}{2}\int_0^L \left[\cos\left(\frac{2n+1}{L}\pi x\right) + 1\right] dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{L}{(2n+1)\pi}\sin\left(\frac{2n+1}{L}\pi x\right) + x\right]_0^L \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{L}{(2n+1)\pi}\sin\left((2n+1)\pi\right) + L\right] \\
&= \frac{L}{2}
\end{aligned} \tag{B-7}
$$

(i),(ii) より

$$
\int_0^L \cos(\lambda_n x)\cos(\lambda_m x)\,d\xi = \frac{L}{2}\delta_{nm} \tag{B-8}
$$

を得る。

付録 C　定積分

$$
\int_0^L (L^2 - \xi^2)\cos(\lambda_n \xi)\,d\xi = 2\frac{(-1)^n}{\lambda_n^3} \qquad \left(\lambda_n = \frac{2n+1}{2L}\pi,\ n = 0, 1, 2, \ldots\right) \tag{C-1}
$$

[証明]

$$
\int_0^L \cos(\lambda_n \xi)\,d\xi = \left[\frac{1}{\lambda_n}\sin(\lambda_n \xi)\right]_0^L = \frac{1}{\lambda_n}\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) = \frac{(-1)^n}{\lambda_n} \tag{C-2}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^L \xi^2 \cos(\lambda_n \xi)\,d\xi &= \left[\frac{\xi^2}{\lambda_n}\sin(\lambda_n \xi)\right]_0^L - \frac{2}{\lambda_n}\int_0^L \xi \sin(\lambda_n \xi)\,d\xi \\
&= \frac{L^2}{\lambda_n}\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) - \frac{2}{\lambda_n}\left\{\left[-\frac{\xi}{\lambda_n}\cos(\lambda_n \xi)\right]_0^L + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^L \cos(\lambda_n \xi)\,d\xi\right\} \\
&= L^2\frac{(-1)^n}{\lambda_n} + \frac{2L}{\lambda_n^2}\underbrace{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)}_{=0} - \frac{2}{\lambda_n^2}\left[\frac{1}{\lambda_n}\sin(\lambda_n \xi)\right]_0^L \\
&= L^2\frac{(-1)^n}{\lambda_n} - \frac{2}{\lambda_n^3}\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right) \\
&= L^2\frac{(-1)^n}{\lambda_n} - \frac{2}{\lambda_n^3}(-1)^n
\end{aligned} \tag{C-3}
$$

(C-2)、(C-3) より

$$
\int_0^L (L^2 - \xi^2)\cos(\lambda_n \xi)\,d\xi = L^2\frac{(-1)^n}{\lambda_n} - L^2\frac{(-1)^n}{\lambda_n} + \frac{2}{\lambda_n^3}(-1)^n = 2\frac{(-1)^n}{\lambda_n^3} \tag{C-4}
$$

となる。

付録 D　定常状態に対する解

(1.2) において、$\dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t} = 0,\ Q(t) = Q_0$ とすれば、

$$\kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x) = -\frac{Q_0}{c\rho} \tag{D-1}$$

となり、定常状態に対する熱伝導方程式が得られる。この両辺を x で 2 回積分すれば、

$$T(x) = -\frac{Q_0}{2\kappa^2 c\rho} x^2 + C_1 x + C_2 \tag{D-2}$$

となる。ここで、境界条件として

$$T(L) = T_1 \qquad : \quad x = L \text{ で } T = T_1 \tag{D-3}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x} T(x)\right|_{x=0} = 0 \qquad : \quad x = 0 \text{ で断熱} \tag{D-4}$$

とおけば、

$$\begin{aligned} T_1 &= -\frac{Q_0}{2\kappa^2 c\rho} L_1^2 + C_1 L_1 + C_2 \\ 0 &= C_1 \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= T_1 + \frac{Q_0}{2\kappa^2 c\rho} L^2 \end{aligned}$$

したがって、定常状態に対する温度分布として、

$$T(x) = T_1 + \frac{Q_0}{2\kappa^2 c\rho}(L^2 - x^2) \tag{D-5}$$

を得る。

付録 E　(3.9) の証明

$$\frac{1}{2}(L^2 - x^2) = \frac{2}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^3} \cos(\lambda_n x) \quad (-L \leq x \leq L) \tag{E-1}$$

[証明]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(L^2 - x^2) &= \frac{1}{2}\left(\frac{2L}{\pi}\right)^2 \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi x}{2L}\right)^2\right) \\ &= \frac{2L^2}{\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{4} - \left(\frac{\pi x}{2L}\right)^2\right) \end{aligned} \tag{E-2}$$

ここで、

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^3} = \frac{\pi}{8}\left(\frac{\pi^2}{4} - x^2\right) \quad (-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}) \tag{E-3}$$

の関係 [2] を (E-2) の右辺に用いれば、

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(L^2-x^2) &= \frac{2L^2}{\pi^2}\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^3}\cos\left[\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right] \\
&= \frac{16L^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right] \\
&= \frac{2}{L}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{2L}{(2n+1)\pi}\right)^3\cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right] \\
&= \frac{2}{L}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\lambda_n^3}\cos(\lambda_n x) \qquad \text{(E-4)}
\end{aligned}
$$

となる。ここで、

$$
\lambda_n = \frac{2n+1}{2L}\pi \qquad (n=0,1,2,\ldots) \qquad \text{(E-5)}
$$

である。

参考文献

[1] スタンリー・ファーロウ　「偏微分方程式　科学者・技術者のための使い方と解き方」　第 9 課　朝倉書店 1983

[2] 森口・宇田川・一松　「数学公式 II - 級数・フーリエ解析 - 」　p. 74　岩波書店 1957