軸対称熱伝導方程式の解法

2017 年 9 月 3 日

概要

一様な発熱をともなった軸対称熱伝導方程式において、(i) 側面が温度拘束されている場合、(ii) 側面で熱伝達がある場合の厳密解を導出する。

目次

1 円柱座標における熱伝導方程式 3
1.1 軸対称熱伝導方程式 3
1.2 初期条件・境界条件・発熱条件 3
2 側面温度拘束の場合 4
2.1 同次境界条件への変換 4
2.2 変数分離法 4
3 側面熱伝達の場合 7

1　円柱座標における熱伝導方程式

1.1　軸対称熱伝導方程式

発熱を伴う円柱 (図 1) における温度分布 $T(r, \phi, z, t)$ は、円柱座標における熱伝導方程式

$$\rho c \frac{\partial}{\partial t} T(r, \phi, z, t) = k \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T(r, \phi, z, t) + Q(t) \tag{1.1}$$

によって記述される。ここで、$k, c, \rho, Q(t)$ はそれぞれ熱伝導率 [W/(m ℃)]、比熱 [J/(kg ℃)]、密度 [kg/m^3]、発熱量密度 [W/m^3] であり、空間的に一定とする。以下で考える軸対称な場合は T は ϕ に依存しないので、$\frac{\partial T}{\partial \phi} = 0$ となり (1.1) は

$$\rho c \frac{\partial}{\partial t} T(r, z, t) = k \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T(r, z, t) + Q(t) \tag{1.2}$$

と簡単化できる。(1.2) は $Q(t)$ を非同次項とする 2 階の非同次偏微分方程式となっており、初期条件・境界条件・発熱条件のもとで解くことにより温度分布を求める。

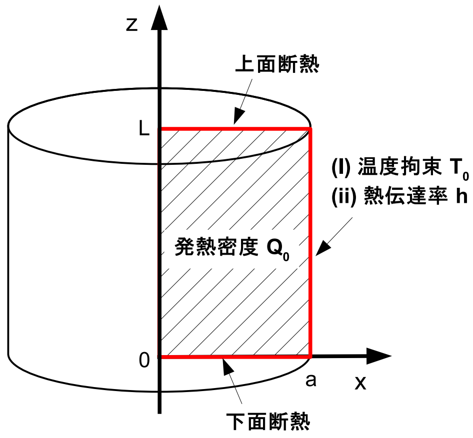

図 1　一様な発熱を伴う円柱とその境界条件

1.2　初期条件・境界条件・発熱条件

本報告書では、$t = 0$ での初期温度分布を一定温度 T_0 とし、図 1 に示すように $z = 0, L$ の上下平面を断熱、 6
$t \geq 0$ で系全体に均一な発熱 Q_0 が与えられたとして、側面 $r = a$ が (i) T_0 に温度拘束される場合と (ii) 熱伝達する場合について考える。したがって、初期条件は

$$T(r, z, 0) = T_0 \tag{1.3}$$

で与えられ、発熱条件は

$$Q(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ Q_0 & (t \geq 0) \end{cases} \tag{1.4}$$

となる。$z = 0, L$ の上下平面での境界条件は

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} T(r, z, t) \right|_{z=L} = 0 \qquad : \qquad z = L \text{ で断熱（同次境界条件）} \tag{1.5}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} T(r, z, t) \right|_{z=0} = 0 \qquad : \qquad z = 0 \text{ で断熱（同次境界条件）} \tag{1.6}$$

であり、$r=a$ の側面での境界条件

$$\text{(i) } r=a \text{ が温度拘束（非同次境界条件）} \qquad T(a,z,t)=T_0 \tag{1.7}$$

$$\text{(ii) } r=a \text{ で熱伝達（非同次境界条件）} \qquad \left.\frac{\partial}{\partial r}T(r,z,t)\right|_{r=a} = -h(T(a,z,t)-T_0) \tag{1.8}$$

となる。ここで、h は側面における熱伝達率 [W/(m^2 ℃)] であり、周囲温度は T_{amb} と仮定している。また、物理的要請として温度は全範囲で

$$T(r,z,t) \text{ は有界 } (0 \le r \le a,\ 0 \le z \le L,\ 0 \le t < \infty) \tag{1.9}$$

であるとする。

2　側面温度拘束の場合

ここでは、側面温度が T_0 に拘束される (1.7) の境界条件の場合の解法について述べる。

2.1　同次境界条件への変換

まず、非同次方程式 (1.2) が同次方程式、非同次境界条件 (1.5) が同次境界条件となるように $T(r,z,t)$ に対して、以下の変数変換を行う。

$$T(r,z,t) = u(r,z,t) + \frac{Q_0}{4k}(a^2-r^2) + T_0 \tag{2.1}$$

(2.1) を (1.2) へ代入して、整理すれば

$$\frac{\partial}{\partial t}u(r,z,t) = \alpha\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u(r,z,t) \tag{2.2}$$

となり $u(r,z,t)$ に対する同次方程式が得られる。ここで、

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} \tag{2.3}$$

である。このとき対応する初期条件、境界条件および物理的要請は

$$u(r,z,0) = -\frac{Q_0}{4k}(a^2-r^2) \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}u(r,z,t)|_{z=L} = 0 \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}u(r,z,t)|_{z=0} = 0 \tag{2.6}$$

$$u(a,z,t) = 0 \tag{2.7}$$

$$u(r,z,t) \text{ は有界 } (0 \le r \le a,\ 0 \le z \le L,\ 0 \le t < \infty) \tag{2.8}$$

と表される。

2.2　変数分離法

変数分離により (2.2) の解を求めるために $u(r,z,t)$ を以下のように仮定する。

$$u(r,z,t) = R(r)H(z)G(t) \tag{2.9}$$

(2.9) を (2.2) へ代入すれば

$$RH\frac{dG}{dt} = \frac{k}{\rho c}\left(HG\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{HG}{r}\frac{dR}{dr} + RG\frac{d^2H}{dz^2}\right) \tag{2.10}$$

となる。この両辺を αRHG で割れば、

$$\frac{1}{\alpha G}\frac{dG}{dt} = \frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{Rr}\frac{dR}{dr} + \frac{1}{H}\frac{d^2H}{dz^2} = -\beta^2 \ (\text{定数}) \tag{2.11}$$

を得る。ここで、β は、$\beta > 0$ を満たす定数であり最終的には境界条件により決定される。(2.11) の左辺は t のみの関数であり、中央辺は (r, z) のみの関数であるので、両辺が等しくなるためには両辺は定数でなければならない。更に、(2.8) の物理的要請により $t \to \infty$ に対して u は有界でなければならないので、この定数は負の値をとる必要があることが分かる。

2.2.1 $G(t)$ に関する解法

(2.11) より、$G(t)$ に関する方程式は

$$\frac{1}{\alpha G}\frac{dG}{dt} = -\beta^2 \tag{2.12}$$

となるので、これを積分して

$$G(t) = C_0 e^{-\alpha\beta^2 t} \tag{2.13}$$

を得る。ここで、C_0 は積分定数であり、後に初期条件を満たすように決定する。この式において、(2.11) の定数が正であったとすると $-\beta^2 > 0$ となり $t \to \infty$ に対して $G \to \infty$ となり (2.8) の物理的要請を満たさないので、(2.11) の定数は負でなければならないことが分かる。

2.2.2 $R(r)H(z)$ に関する解法

一方、(2.11) より、$R(r)H(z)$ に関する方程式は

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{Rr}\frac{dR}{dr} + \frac{1}{H}\frac{d^2H}{dz^2} = -\beta^2 \tag{2.14}$$

となるので、これより

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{Rr}\frac{dR}{dr} + \beta^2 = -\frac{1}{H}\frac{d^2H}{dz^2} = \mu \tag{2.15}$$

となる。ここで、左辺は r のみの関数であり、中央辺は z のみの関数であるので、両辺が等しくなるためには両辺は定数 $(= \mu)$ でなければならないことが分かる。 まず、z 方向の $H(z)$ について考える。(2.15) より

$$\frac{d^2H}{dz^2} = -\mu H \tag{2.16}$$

となるので、$\mu \neq 0$ の場合の解は

$$H(z) = C_1 \sin(\mu z) + C_2 \cos(\mu z) \tag{2.17}$$

$$\frac{dH}{dz} = \mu C_1 \cos(\mu z) - \mu C_2 \sin(\mu z) \tag{2.18}$$

となる。$H(z)$ に対する境界条件は (2.5)、(2.6) より、

$$\frac{d}{dz}H(z)|_{z=L} = 0 \tag{2.19}$$

$$\frac{d}{dz}H(z)|_{z=0} = 0 \tag{2.20}$$

であるので、(2.18) を代入すれば

$$\mu C_1 \cos(\mu L) - \mu C_2 \sin(\mu L) = 0 \tag{2.21}$$

$$\mu C_1 = 0 \tag{2.22}$$

となるが、これを満たす C_1, C_2 は

$$C_1 = C_2 = 0 \to H(z) = 0 \tag{2.23}$$

となり、$H(z)$ が恒等的に 0 となるため $\mu \neq 0$ の解は不適であることが分かる。そこで、$\mu = 0$ の場合を考えれば (2.16) から

$$H(z) = C_3 z + C_4 \tag{2.24}$$

$$\frac{dH}{dz} = C_3 \tag{2.25}$$

となるので、境界条件 (2.19)、(2.20) を満たすためには

$$C_3 = 0,\quad C_4 \text{は任意} \tag{2.26}$$

でなければならないことが分かる。したがって、(2.19)、(2.20) の断熱条件に対しては、

$$H(z) = C_4 = \text{一定} \tag{2.27}$$

となり z 方向に一様な温度分布となることが分かる。 次に、r 方向の $R(r)$ については、$\mu = 0$ の場合にのみ $H(z)$ が有効な解となるので、$\mu = 0$ の場合だけを考えればよく、(2.15) は

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \beta^2 R = 0 \tag{2.28}$$

となる。上記の方程式は、0 階の Bessel 方程式であり、その基本解は

$$R(r) = AJ_0(\beta r) + BY_0(\beta r) \tag{2.29}$$

で与えられる。[*1]　ここで、A, B は定数、$J_0(\beta r), Y_0(\beta r)$ は (2.28) の 0 階の Bessel 方程式の 1 次独立な解を表し、それぞれ第 1 種、第 2 種 Bessel 関数と呼ばれる。(2.8) の物理的要請により、

$$R(r) \text{ は有界 } (0 \leq r \leq a) \tag{2.30}$$

でなければならないので、$r \to 0$ に対して $Y_0 \to \infty$ となる Y_0 は不適であるので、$B = 0$ となり

$$R(r) = AJ_0(\beta r) \tag{2.31}$$

と表されることが分かる。更に、(2.7) の境界条件より

$$R(a) = 0 \tag{2.32}$$

であるので

$$J_0(\beta a) = 0 \tag{2.33}$$

となる必要がある。ここで、0 階第 1 種の Bessel 関数 $J_0(x)$ の小さい方から n 番目のゼロ点を λ_n とすれば、（すなわち $J_0(\lambda_n) = 0$）

$$\beta = \frac{\lambda_n}{a} \tag{2.34}$$

と求まる。[*2]　したがって

$$R(r) = AJ_0(\lambda_n \frac{r}{a}) \tag{2.35}$$

となる。

[*1] これは $\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 y = 0$ の基本解が $x(t) = A\sin(kt) + B\cos(kt)$ と与えられることに対応しており、三角関数が Bessel 関数に置き換わったと思えばよい。

[*2] $\cos(\beta a) = 0$ の場合のゼロ点は、$\beta a = n\pi (n = 1, 2, \cdots)$ 解析的に求まるが、Bessel 関数のゼロ点は解析的には求まらないため λ_n と書いて数値的に与えることになる。

2.2.3 熱伝導方程式の解

(2.9)、(2.13)、(2.27) 及び (2.35) より

$$u(r,z,t) = AJ_0(\lambda_n \frac{r}{a})e^{-\alpha(\frac{\lambda_n}{a})^2 t} \tag{2.36}$$

となる。ここでは積分定数をひとまとめにして A と表している。(2.2) は線形微分方程式であるので n について加え合わせた解の和もまた解となり、一般解は

$$u(r,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n \frac{r}{a})e^{-\alpha(\frac{\lambda_n}{a})^2 t} \tag{2.37}$$

と表される。次に、初期条件 (2.4) を満たすように A_n を決定すると $t=0$ では

$$-\frac{Q_0}{4k}(a^2 - r^2) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n \frac{r}{a}) \tag{2.38}$$

とならなければならない。ここで $a^2 - r^2$ に関する Fourier-Bessel 展開の公式

$$a^2 - r^2 = 8a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)} J_0(\lambda_n \frac{r}{a}) \tag{2.39}$$

を (2.38) へ代入し、両辺の n の各項を比較すれば

$$A_n = -\frac{2Q_0 a^2}{k} \frac{1}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)} \tag{2.40}$$

となることが分かる。したがって

$$u(r,z,t) = -\frac{2Q_0 a^2}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n \frac{r}{a})}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)} J_0(\lambda_n \frac{r}{a})e^{-\alpha(\frac{\lambda_n}{a})^2 t} \tag{2.41}$$

を得る。この結果を (2.1) へ代入すれば、

$$T(r,z,t) = T_0 + \frac{Q_0}{4k}(a^2 - r^2) - \frac{2Q_0 a^2}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n \frac{r}{a})}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)} J_0(\lambda_n \frac{r}{a})e^{-\alpha(\frac{\lambda_n}{a})^2 t} \tag{2.42}$$

となり、側面温度拘束の場合の温度分布が求まる。

3 側面熱伝達の場合

次に、円柱側面から熱伝達がある場合として、$t < 0$ において一様な温度 T_0 にあった円柱が、$t \geq 0$ で周囲温度 T_{amb} の環境に置かれ熱伝達するとともに円柱内部で発熱密度 Q_0 で発熱する場合を考える。この場合に対する初期条件、発熱条件、境界条件、物理的要請は

$$T(r,z,0) = T_0 \tag{3.1}$$

$$Q(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ Q_0 & (t \geq 0) \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}T(r,z,t)\right|_{z=L} = 0 \qquad : \quad z = L \text{ で断熱（同次境界条件）} \tag{3.3}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}T(r,z,t)\right|_{z=0} = 0 \qquad : \quad z = 0 \text{ で断熱（同次境界条件）} \tag{3.4}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial r}T(r,z,t)\right|_{r=a} = -h(T(a,z,t) - T_0) \qquad : \quad r = a \text{ で熱伝達（非同次境界条件）} \tag{3.5}$$

$$T(r,z,t) \text{ は有界 } (0 \leq r \leq a,\ 0 \leq z \leq L,\ 0 \leq t < \infty) \tag{3.6}$$

となる。側面での熱伝達境界条件 (3.5) は定数項 T_{amb} の存在のため非同次境界条件となっているので、同次境界条件とするため以下の変換を行う。

$$T(r,z,t) = u(r,z,t) + \frac{Q_0}{4k}(a^2 - r^2) + T_{\mathrm{amb}} + \frac{Qa}{2kh} \tag{3.7}$$

(3.7) を (3.5) へ代入すれば、

$$\left.\frac{\partial}{\partial r}u(r,z,t)\right|_{r=a} = -hu|_{r=a} \tag{3.8}$$

となり、同次境界条件となり変数分離が可能となる。一方、(3.7) を (1.2) へ代入すれば、(2.2) と同様に

$$\frac{\partial}{\partial t}u(r,z,t) = \alpha\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u(r,z,t) \tag{3.9}$$

となり $u(r,z,t)$ に対する同次方程式が得られる。以上のように $u(r,z,t)$ に関して方程式及び境界条件が同次となったので、(2.9) 以下で行ったと同様の変数分離を行うことにより

$$G(t) = C_0 e^{-\alpha\beta^2 t} \tag{3.10}$$

$$H(z) = 一定 \tag{3.11}$$

$$R(r) = AJ_0(\beta r) \tag{3.12}$$

が得られる。今回は、r に関する境界条件が (3.8) で与えられているので、(3.12) を代入して

$$\begin{aligned}
\left.A\frac{\partial}{\partial r}J_0(\beta r)\right|_{r=a} &= -hAJ_0(\beta a)\\
\frac{\partial}{\partial a}J_0(\beta a) &= -hJ_0(\beta a)\\
\beta\frac{\partial}{\partial \beta a}J_0(\beta a) &= -hJ_0(\beta a)\\
\beta a\frac{\partial}{\partial \beta a}J_0(\beta a) &= -ahJ_0(\beta a)
\end{aligned}$$

ここで、$\beta a = x$ とおけば、上式は

$$x\frac{\partial}{\partial x}J_0(x) + ahJ_0(x) = 0 \tag{3.13}$$

と表される。(3.13) の小さい方から n 番目の正の根を ξ_n とすれば

$$\beta = \frac{\xi_n}{a} \tag{3.14}$$

と求められる。したがって、

$$u(r,z,t) = AJ_0(\xi_n\frac{r}{a})e^{-\alpha(\frac{\xi_n}{a})^2 t} \tag{3.15}$$

ここでは積分定数をひとまとめにして A と表している。(3.9) は線形微分方程式であるので n について加え合わせた解の和もまた解となり、一般解は

$$u(r,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\xi_n\frac{r}{a})e^{-\alpha(\frac{\xi_n}{a})^2 t} \tag{3.16}$$

と表される。次に、初期条件 (3.1) を満たすように A_n を決定する。$t = 0$ では

$$\begin{aligned}
T_0 &= u(r,z,0) + \frac{Q_0}{4k}(a^2 - r^2) + T_{\mathrm{amb}} + \frac{Q_0 a}{2kh}\\
u(r,z,0) &= T_0 - T_{\mathrm{amb}} - \frac{Q_0 a}{2kh} \quad - \frac{Q_0}{4k}(a^2 - r^2)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

したがって

$$\left(T_0 - T_{\mathrm{amb}} - \frac{Q_0 a^2}{4k} - \frac{Qa}{2kh}\right) + \frac{Q_0 a^2}{4k}\left(\frac{r}{a}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\xi_n\frac{r}{a}) \tag{3.18}$$

を満たすように A_n を決めればよい。ここで、区間 $0 < x < 1$ で定義された任意の関数 $f(x)$ に対する Dini 展開を考えると

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\xi_n x) \tag{3.19}$$

$$A_n = \frac{2}{J_0^2(\xi_n) + J_1^2(\xi_n)} \int_0^1 x f(x) J_0(\xi_n x) dx \tag{3.20}$$

ただし、ξ_n は $x\frac{\partial}{\partial x}J_0(x) + HJ_0(x) = 0$ の小さい方から n 番目の正の根である。この Dini 展開を利用すれば、(3.18) 左辺の定数項部分に対する展開係数は、$f(x) = 1$ として

$$\begin{aligned} A_n^{'} &= \frac{2}{J_0^2(\xi_n) + J_1^2(\xi_n)} \int_0^1 x J_0(\xi_n x) dx \\ &= \frac{2J_1(\xi_n)}{\xi_n (J_0^2(\xi_n) + J_1^2(\xi_n))} \end{aligned} \tag{3.21}$$

と求められ、$(\frac{r}{a})^2 = x^2$ 部分は、$f(x) = x^2$ として

$$\begin{aligned} A_n^{''} &= \frac{2}{J_0^2(\xi_n) + J_1^2(\xi_n)} \int_0^1 x^3 J_0(\xi_n x) dx \\ &= \frac{2}{\xi_n^3 (J_0^2(\xi_n) + J_1^2(\xi_n))} [(\xi_n^2 - 4) J_1(\xi_n) + 2\xi_n J_0(\xi_n)] \end{aligned} \tag{3.22}$$

と求められる。ここで、Bessel 関数の積分公式

$$\int_0^1 x J_0(\alpha x) dx = \frac{1}{\alpha} J_1(\alpha x) \tag{3.23}$$

$$\int_0^1 x^3 J_0(\alpha x) dx = \frac{\alpha^2 - 4}{\alpha^3} J_1(\alpha x) + \frac{2}{\alpha^2} J_0(\alpha x) \tag{3.24}$$

を用いた。したがって、(3.18) の左辺に対する Dini 展開は

$$\begin{aligned} &\left(T_0 - T_{\mathrm{amb}} - \frac{Q_0 a}{4k}(a + \frac{2}{h})\right) + \frac{Q_0 a^2}{4k}\left(\frac{r}{a}\right)^2 = \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{J_0^2(\xi_n) + J_1^2(\xi_n)} \left[\left(T_0 - T_{\mathrm{amb}} - \frac{Q_0 a}{4k}(a + \frac{2}{h})\right) \frac{J_1(\xi_n)}{\xi_n} + \right. \\ &\left. \frac{Q_0 a^2}{4k} \frac{(\xi_n^2 - 4) J_1(\xi_n) + 2\xi_n J_0(\xi_n)}{\xi_n^3}\right] J_0(\xi_n \frac{r}{a}) \end{aligned} \tag{3.25}$$

と表される。(3.18) と (3.25) の両辺を比較すれば

$$A_n = \frac{2}{J_0^2(\xi_n) + J_1^2(\xi_n)} \left[\left(T_0 - T_{\mathrm{amb}} - \frac{Q_0 a}{4k}(a - \frac{2}{h})\right) \frac{J_1(\xi_n)}{\xi_n} + \frac{Q_0 a^2}{4k} \frac{(\xi_n^2 - 4) J_1(\xi_n) + 2\xi_n J_0(\xi_n)}{\xi_n^3}\right] J_0(\xi_n \frac{r}{a}) e^{-\alpha(\frac{\xi_n}{a})^2 t} \tag{3.26}$$

を得る。以上より、求める温度分布は、

$$\begin{aligned} T(r,z,t) &= T_{\mathrm{amb}} + \frac{Q_0 a}{2kh} + \frac{Q_0}{4k}(a^2 - r^2) + \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{J_0^2(\xi_n) + J_1^2(\xi_n)} \left[\left(T_0 - T_{\mathrm{amb}} - \frac{Q_0 a}{4k}(a + \frac{2}{h})\right) \frac{J_1(\xi_n)}{\xi_n} + \right. \\ &\left. \frac{Q_0 a^2}{4k} \frac{(\xi_n^2 - 4) J_1(\xi_n) + 2\xi_n J_0(\xi_n)}{\xi_n^3}\right] J_0(\xi_n \frac{r}{a}) e^{-\alpha(\frac{\xi_n}{a})^2 t} \end{aligned} \tag{3.27}$$

となる。ここで、Σ は方程式 $x\frac{\partial}{\partial x}J_0(x) + ahJ_0(x) = 0$ のすべての正の根についての和である。(3.27) において、$Q_0 = 0$ とすれば、発熱のない場合の温度分布

$$T(r,z,t) = T_{\mathrm{amb}} + (T_0 - T_{\mathrm{amb}}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1(\xi_n)}{\xi_n (J_0^2(\xi_n) + J_1^2(\xi_n))} J_0(\xi_n \frac{r}{a}) e^{-\alpha(\frac{\xi_n}{a})^2 t} \tag{3.28}$$

が得られる。

参考文献

[1] Frank Bowman （平野鉄太郎　訳)「実用数学全書　ベッセル関数入門」p. 21　日新出版 1963

[2] スタンリー・ファーロウ　「偏微分方程式　科学者・技術者のための使い方と解き方」p. 238　朝倉書店 1983